THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

PAR

Jean Claude ADAM

Sujet de la Thèse

MODE DE DERIVE DISSIPATIF LOCALISE DANS LES TOKOMAKS

Soutenue le 9 Avril 1973 devant la Commission d' Examen

MM.	J. YVON	Président
	J.L. DELCROIX	Examinateurs
	M. TROCHERIS	
	G. LAVAL	
D.F.	DÜCHS	Invité

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

PAR

Jean Claude ADAM

Sujet de la Thèse

MODE DE DERIVE DISSIPATIF LOCALISE DANS LES TOKOMAKS

Soutenue le 9 Avril 1973 devant la Commission d' Examen

MM.	J. YVON	Président
	J.L. DELCROIX	Examinateurs
	M. TROCHERIS	
	G. LAVAL	
	D.F. DÜCHS	Invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Remerciements.

Ce travail a été effectué au sein de la section de théorie des gaz ionisés au centre d'études nucléaires de Fontenay aux Roses.

Je remercie monsieur M. TROCHERIS, Chef du département de physique du plasma et de la fusion contrôlée et Monsieur C. MERCIER, chef de la section de théorie des gaz ionisés de m'avoir accueilli dans les laboratoires du C. E. A.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur J. YVON pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de soutenance de thèse.

Que Monsieur le Professeur J. L. DELCROIX qui m'a introduit à la physique des plasmas trouve ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté de participer à ce même Jury.

Messieurs G. LAVAL et R. PELLAT ont patiemment guidé mes premiers pas dans la jungle des microinstabilités, sans eux le présent travail n'aurait pu voir le jour, qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je ne saurais oublier de remercier les membres du groupe qui souvent ont collaboré directement à ce travail.

Que Madame AUBY et les membres du département de calcul électronique qui m'ont apporté leur concours et l'équipe de Monsieur DANET qui s'est chargée de l'impression de ce mémoire trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur gentillesse.

E R R A T A

.-.-.-.-.-.-.

Page 10 $< \omega_D >$: lire fréquence de dérive moyenne.....
$< \omega >$: lire partie nulle de la fréquence
lire $\nu = \nu_o \frac{V_{Te}^2}{(2\varepsilon)^{3/2}}$.

Page 14 remplacer partout ν_e par ν_{ei}.

Page 16 ajouter en bas de page :
Dans les équations précédentes les températures sont exprimées en électron volt, les champs magnétiques en gauss.

Page 23 11ème ligne : lire $n_o < 2.10^{13}$.

Page 26 lire $\eta_E = 4\nu\rho_{\gamma e}^2 (1+\theta)$.

Page 43 paragraphe 3, 4ème ligne :
lire Alfven et non Alfen.

Page 49 Formules 23 et 25 lire ω_{bi}^2 et non ω_b^2 .

Page 55 formule 38 lire : $(\frac{m\varepsilon}{T} - \frac{3}{2})$.

Page 58 formule 47 idem.

Page 61 formule 57 idem.

Page 65 fig.13B lire : $\theta=4$ au lieu de $\theta=3$.

Page 66 lire après la formule 61 :
où I_o et I_1 sont des fonctions de Bessel d'argument b.

Page 87 lire ν_{ei} et non ν_e.
4ème ligne avant la fin lire : dépendances en q^2.

SOMMAIRE

		Pages
Sommaire des figures		3
Résumé		5
Liste des notations		9
Quelques ordres de grandeur		11
CHAPITRE I :	L'expérience Tokomak et la théorie néoclassique de la diffusion.	12
CHAPITRE II :	Bilan de la situation expérimentale.	
1.	Introduction	17
2.	Bilan d'énergie dans les Tokomaks	18
2.1	Cas de la composante ionique	19
2.2	Cas de la composante électronique	19
2.3	Les formules empiriques d'Artsimovitch	23
2.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux	24
3.	Les simulations numériques des décharges de type Tokomak	33
4.	Conséquences	34
CHAPITRE III :	Les modèles mathématiques utilisés.	
1.	Le modèle de configuration magnétique	41
2.	Le modèle de plasma à l'équilibre	42
3.	L'équation perturbée.	43
CHAPITRE IV :	Etude linéaire de l'instabilité	
1.	Etablissement de la relation de dispersion	47
2.	Mode localisé	48
3.	Effets résonnants dus aux électrons	55
4.	Calcul du taux de croissance	57
5.	Calcul de l'exponentiation	58
6.	Mode résonnant.	72
CHAPITRE V :	Conséquences macroscopiques du mode d'électrons piégés.	
1.	Introduction	74
2.	Expression des flux de diffusion	75
3.	Etude de la limitation non linéaire	80
4.	Coefficients de diffusion.	84

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548020_0030

Conclusions			88
Appendice	A1 :	Définition du système de coordonnées utilisé.	90
	A2 :	Détermination de la fonction de distribution dé d'équilibre	94
	A3 :	Ecriture de l'équation de Vlasov perturbée dans le cadre de l'approwimation BKW	97
	A4 :	Calcul de la densité perturbée des électrons et des ions	102
	A5 :	Opérateur de collision utilisé	107
	A6 :	Calcul de la fonction de distribution perturbée des électrons en présence de collisions.	110
	A7 :	Etude du mode résonnant.	115
	A8 :	Calcul des paramètres de l'instabilité pour $b \sim 1$	117
	A9 :	Etude de la délocalisation du mode par la turbulence	119
Bibliographie			122

SOMMAIRE DES FIGURES

Figures :		Pages
1A - 1B	Caractéristiques de la composante ionique dans les décharges de type Tokomak	20
2A - 2B - 2C	Caractéristiques du temps de confinement de l'énergie de la composante électronique dans T3.	22
3	Energie totale emmagasinée dans le plasma en fonction du courant.	24
4	Profils de température et de densité dans T3.	28
5	Comparaison des résultats expérimentaux avec les formules pseudo classiques.	30
6A - 6B - 6C	Résultats du dispositif ST de Princeton.	31
7A - 7B	Effet de peau néo et pseudo classique (simulation)	35
8A	Evolution de la température électronique en fonction du temps (simulation)	36
8 B	Profil radial de température dans le régime asymptotique (simulation)	36
9	Temps de confinement de l'énergie en fonction du courant (simulation)	37
10A	Structure des deux premiers modes pairs.	52
10B	Structure des deux premiers modes impairs.	52
11A	Influence de sigma et du point de localisation sur le premier mode impair H1	53
11B	Influence de sigma et du point de localisation sur le deuxième mode impair H3	54
12	Variation du taux de croissance de H1 en fonction de $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{v_0 R/\rho}}$ pour deux valeurs de sigma et du point de localisation.	62

13	Variation relative de la vitesse de groupe radiale en fonction de kai et de $\Theta = T_e / T_i$	64
13A	Dispersion de la vitesse de groupe radiale en fonction de kai pour différentes valeurs de $\Theta = T_e / T_i$	65
14A	Variation du taux d'exponentiation en fonction de kai pour différentes valeurs de $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{v_0 R/\rho}}$	67
14B	Variation du taux d'exponentiation maximum en fonction de kai pour différentes valeurs de $\omega_T / \Theta \omega_E$	68
14C	Variation du taux d'exponentiation en fonction de $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{v_0 R/\rho}}$ pour différentes valeurs de $b_0 = \frac{k^2 a_i^2}{2}$	69
14D	Variation du taux maximum d'exponentiation en fonction de $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{v_0 R/\rho}}$ pour différentes valeurs de $\omega_T / \Theta \omega_E$	70
15	Variation du taux de croissance du mode résonnant en fonction de ρ_0 / R	73
16A	Variation relative des coefficients de diffusion des particules en fonction de α pour le mode H1, $\sigma = 2$, $\gamma_m = 60°$	80
16B	Variation relative des coefficients de diffusions de l'énergie en fonction de α pour le mode H3, $\sigma = 2$, $\gamma_m = 60°$	80
17A-B	Idem pour $\sigma = 3$ $\gamma_m = 80°$	81
18A	Variation du flux de diffusion des particules pour $\sigma = 2$ $\gamma_m = 60°$ en fonction de α pour différentes valeurs du gradient de température.	86
18B	Variation du flux de diffusion de l'énergie dans les mêmes conditions.	86

RESUME

Les recherches sur la fusion thermonucléaire ont toujours été liées à l'étude des instabilités du plasma qui limitent son confinement. Les configurations du type Tokomak paraissent avoir résolu le problème primordial des instabilités macroscopiques qui affectant l'ensemble du plasma en provoquent quand elles existent une disparition extrêmement rapide.

Néanmoins, les résultats des expériences actuelles montrent une diffusion du plasma beaucoup plus rapide que ne le prévoit la théorie dite néo-classique des plasmas axisymétriques macroscopiquement stables. Les simulations numériques des décharges Tokomak semblent en outre confirmer que l'état d'équilibre observé ne peut être obtenu classiquement.

En réalité un plasma confiné ne peut être en équilibre thermodynamique et l'écart à l'équilibre constitue une source d'instabilités microscopiques. Le confinement implique en particulier l'existence d'un gradient de densité qui est à l'origine d'une classe d'instabilités dites "universelles", les instabilités de dérive. Cette classe d'instabilité a été étudiée de façon, approfondie en raison de son caractère inévitable. L'influence des collisions, des effets de rayon de Larmor finis et du cisaillement sont aujourd'hui bien connus dans le cas des configurations magnétiques droites. Un nouveau type d'instabilité de dérive propre aux configurations magnétiques toriques a été mis en évidence en 1968 par B. B. Kadomtsev. Il s'agit des instabilités de particules piégées. Ces instabilités tirent leur énergie d'une fraction de la population des particules qui est piégée dans des modulations du champ toroïdal de la configuration. L'instabilité étudiée par Kadomtsev est une instabilité dite d'ions piégés très basse fréquence et dans sa forme primitive essentiellement non collisionnelle. L'étude du domaine d'existence de cette instabilité montre que même en la prolongeant dans le régime collisionnel elle ne peut exister dans le domaine des paramètres expérimentaux actuels.

Par ailleurs, en raison du cisaillement relativement élevé des lignes de force dans un Tokomak, il n'existe pas d'instabilité classique susceptible d'expliquer les résultats anormaux observés.

Dans le présent travail nous nous sommes proposés de chercher si dans le domaine actuel des paramètres, il ne pouvait exister une nouvelle instabilité susceptible de provoquer cette diffusion anormale. Compte tenu des restrictions imposées aux microinstabilités "cataloguées" elle devait présenter à priori les caractéristiques suivantes :

- être dissipative compte tenu du taux encore élevé de la fréquence de collision efficace des particules piégées.

- pouvoir exister en présence d'un gradient de température même modéré.

- ne pas être sensible au cisaillement des lignes de force.

Ce dernier point a une conséquence immédiate sur la structure spatiale de l'instabilité. Le cisaillement des lignes de force stabilise en effet les microinstabilités en adaptant leur nombre d'onde à la zone d'absorption par effet Landau. Pour que cette adaptation n'ait pas lieu, il est nécessaire que le mode soit localisé, c'est-à-dire que son extension soit inférieure à un petit tour de tore. La possibilité de localiser des modes le long des lignes de force avaient été démontrée à partir de l'équation de Vlasov en simulant la courbure par une gravité. Nous avons donc cherché à construire un mode localisé grâce à la courbure géodésique des lignes de force en tenant compte de la géométrie exacte du Tokomak.

L'étude devant tenir compte de la structure fine de l'espace des vitesses il est nécessaire de partir de l'équation de Vlasov. Nous avons traité les collisions par un opérateur de Fokker Planck simplifié, valable dans l'approximation du gaz de Lorentz qu'il est facile de justifier dans le domaine de l'espace des phases qui nous intéresse.

Le calcul se fait en deux étapes : la résolution de l'équation de Vlasov sans second membre fournit la structure spatiale du mode le long des lignes de force en faisant radialement une approximation BKW. On obtient ensuite le taux de croissance en perturbant la forme quadratique associé à l'équation complète. Cette dernière étape nécessite le passage au calcul numérique, l'équation donnant la fonction de distribution des électrons piégés étant beaucoup trop compliquée pour être résolue analytiquement même approximativement. Nous établissons les résultats suivants :

1) Il est possible de construire des modes instables convectifs de grande extension radiale même en présence d'un cisaillement fort des lignes de force. Leurs taux de croissance est faible mais leur vitesse de groupe aussi et sur l'échelle du gradient de densité ils peuvent atteindre des facteurs d'exponentiation supérieur à 10.

2) L'instabilité existe même en l'absence de gradient de température, mais elle est amplifiée par ce dernier si la fréquence de collision effective est supérieure à la fréquence du mode.

3) Pour des tores présentant un rapport d'aspect modéré, l'instabilité persiste même si la fréquence de collision devient négligeable par suite d'effets résonnants sur les électrons.

4) Nous nous sommes efforcés d'évaluer approximativement les conséquences de cette instabilité sur la diffusion des particules et de l'énergie. Les résultats obtenus sont compatibles avec les coefficients empiriques dit pseudo classiques d'Arsimovitch, mais surtout on établi que le coefficient de diffusion de l'énergie est fortement anormal car il est supérieur au coefficient de diffusion des particules alors que le coefficient prévu par la théorie néo-classique dans le régime qui nous intéresse est près de 10 fois plus faible.

Afin de faciliter la lecture quelque peu aride d'une thèse théorique nous avons rejeté tous les calculs longs et fastidieux à une suite d'appendices de calculs qui terminent ce travail.

Dans le chapitre I nous décrivons sommairement l'expérience Tokomak et le cadre théorique constitué par la théorie néo-classique de la diffusion.

Le chapitre II est consacré à un bilan complet des résultats acquis tant expérimentalement que numériquement sur les dispositifs T3 et ST.

Le chapitre III contient la description des modèles mathématiques du plasma et des perturbations que nous étudions.

Dans le chapitre IV après avoir établi la relation de dispersion des ondes, nous calculons les taux de croissance et d'exponentiation.

Pour terminer dans le chapitre V nous évaluons la diffusion induite par le mode et en particulier sa dépendance en fonction de la fréquence de collision et des nombres d'onde radiaux et azimutaux.

LISTE DES NOTATIONS

ψ fonction de flux du champ poloïdal d'équilibre

φ angle azimutal autour de l'axe de symétrie

γ angle azimutal autour de l'axe magnétique

r distance à l'axe de symétrie

ρ distance à l'axe magnétique

R distance de l'axe magnétique à l'axe de symétrie

$\rho_0 = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{d\rho}$ longueur caractéristique de gradient

ε énergie cinétique des particules

μ premier invariant adiabatique

$\Phi_0(\psi)$ potentiel électrique d'équilibre

W_j énergie totale de la particule j

f_{0j} fonction de distribution d'équilibre des particules j

n_0 densité à l'équilibre

l nombre d'onde azimutal

k_ψ nombre d'onde radial dans le système de coordonnées ψ

$k = k_\psi |\nabla\psi|$ nombre d'onde radial dans le système de coordonnées ρ

$q = \frac{1}{\iota}$ facteur de sécurité défini comme l'inverse de la transformée rotationnelle ι

$\zeta = \frac{\rho dq}{q d\rho}$ paramètre mesurant le cisaillement

$\Lambda = \frac{k\rho}{l} - \gamma\zeta q$

$b = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2}\left(1 + \left(\frac{\Lambda}{q}\right)^2\right)$ paramètre mesurant les effets de rayon de Larmor fini

$$b_0 = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2} + \frac{k^2 a_i^2}{2} = b\ (\xi=0) \qquad b_l = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2} = b\ (\xi=0, k=0)$$

$$F(b) = I_0(b)\, e^{-b}$$

$\Theta = \frac{T_e}{T_i}$ rapport des températures des 2 espèces de particules

$\langle \omega_D \rangle$ fréquence de rotation angulaire moyenne dans le gradient de champ magnétique

ω_E fréquence de rotation angulaire dans le champ électrique d'équilibre

$\omega_e^t = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{1/2} \frac{V_{Te}}{qR}$ fréquence moyenne d'aller retour des électrons piégés

$\tau = (\omega_e^t)^{-1}$ période moyenne d'aller retour des électrons piégés

$\omega_{bi} = \frac{V_{Ti}}{qR\sqrt{2}}$ fréquence moyenne de transit des ions

ω partie nulle de la fréquence des perturbations étudiées.

$\gamma\omega$ partie imaginaire de la fréquence des perturbations étudiées

$\tilde{\Phi}_1(\gamma, t) = Z(\gamma, t) e^{i\alpha\gamma}$ avec $\alpha = \frac{\omega_E (\omega - l\omega_E)}{2q^2 \omega_b^2}$ potentiel électrique perturbé

$\sqrt{\sigma}$ extension azimutale de la perturbation

γ_0 coordonnée azimutale du point de réflexion des électrons piégés

γ_m coordonnée azimutale de la perturbation localisée

$\nu = \nu_0 \frac{V_{Te}^2}{(2\ )^{3/2}}$ fréquence de collision électron ion

$\nu_{eff} = \nu_0 \frac{R}{\rho}$ fréquence moyenne de collision pour les électrons piégés

α_0 rapport de la fréquence du mode à la fréquence de collision effective moyenne.

Quelques ordres de grandeurs

Nous adopterons comme plasma caractéristique du régime actuel de fonctionnement le plasma suivant

densité	$n \sim 2\ 10^{13}$ cm^{-3}
température électronique	$T_e \sim 2$ keV
température ionique	$T_i \sim 500$ eV
champ magnétique	$B \sim 40$ kG

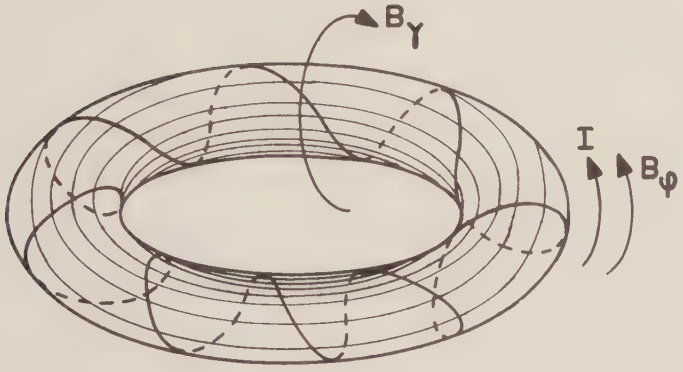
On trouve pour

Longueur de Debye	$\lambda_D \sim 10^{-2}$ cm
Rayon de Larmor des ions	$a_i \sim 10^{-1}$ cm
Rayon de Larmor des électrons	$a_e \sim 3\ 10^{-3}$ cm

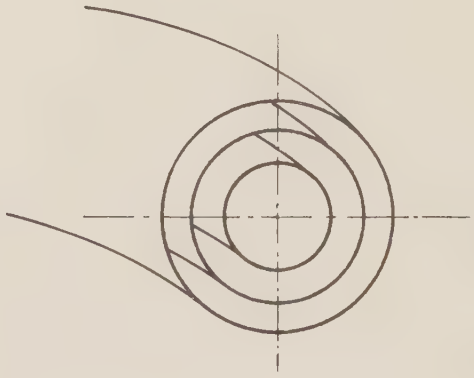
Fréquence cyclotronique électronique	$\Omega_{ce} \sim 100$ GHz
Fréquence plasma électronique	$f_{pe} \sim 40$ GHz
Fréquence plasma ionique	$f_{pi} \sim 0.9$ GHz
Fréquence cyclotronique ionique	$\Omega_{ci} \sim 60$ MHz
Fréquence transit électronique	$\omega_{be} \sim 6$ MHz
Fréquence d'aller retour des électrons piégés	$\omega_{be}^{t} \sim 2$ MHz
Fréquence de transit ionique	$\omega_{bi} \sim 0.1$ MHz
Fréquence de rotation du plasma	$\omega_E \sim 5\ 10^4$ Hz
Fréquence de collision électrons ions	$\nu_{ei} \sim 3\ 10^4$ Hz
Fréquence de dérive de courbure magnétique dans le plan horizontal du tore	$\omega_D \sim 6\ 10^3$ Hz
Fréquence de dérive de courbure magnétique dans le haut du tore	$\omega_D \sim 2\ 10^2$ Hz

CHAPITRE I

On appelle Tokomak des systèmes toroïdaux ayant la symétrie de révolution dans lesquels un plasma chaud est confiné par le champ magnétique créé par le courant qui y circule et utilisant un fort champ magnétique longitudinal B_φ pour supprimer les principales instabilités magnétohydrodynamiques. Ce champ magnétique longitudinal est plusieurs ordres de grandeurs plus grand que le champ azimutal B_γ créé par le courant circulant dans le plasma.



Structure hélicoïdale du champ magnétique d'un "Tokomak"



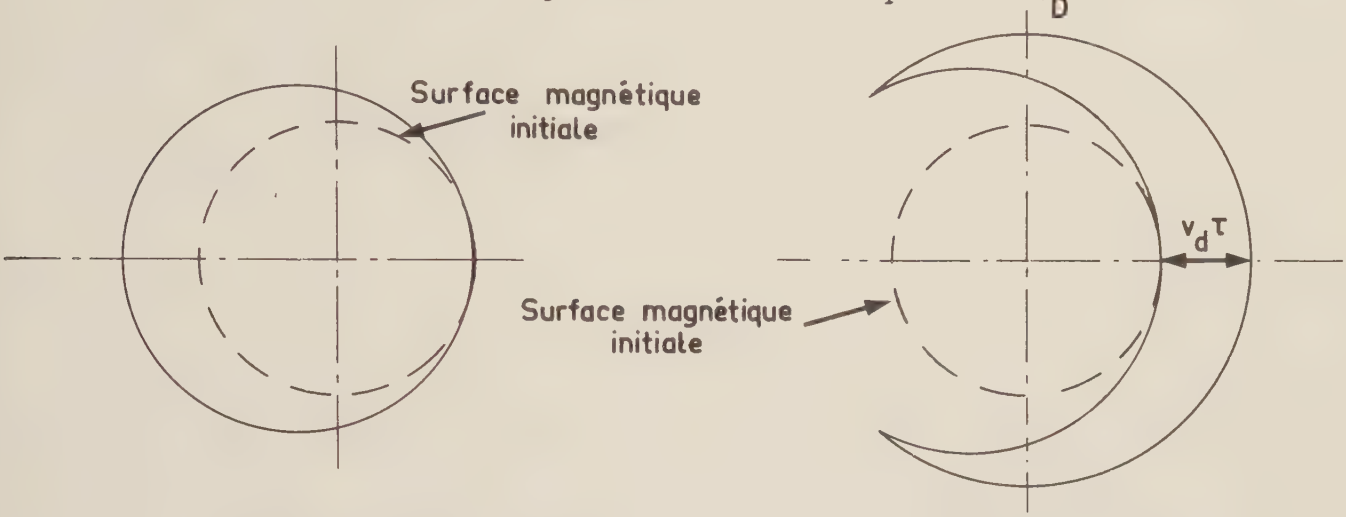
Surfaces magnétiques dans un Tokomak

On peut se représenter idéalement le champ magnétique résultant de la superposition des champs B_φ et B_γ comme un champ hélicoïdal enroulé sur un tore. En première approximation la section droite des surfaces magnétiques peut être considérée comme circulaire. Soulignons immédiatement que pour des plasmas présentant un β poloïdal ($\beta \sim nkT / B_\gamma^2$) suffisamment grand il se produit une nette déformation des surfaces magnétiques.

Par suite de la faiblesse du rapport B_γ / B_φ la transformée rotationnelle des lignes de force c'est-à-dire le nombre de petits tours de tore qu'elles font par grand tour est faible et les lignes de champ font un angle réduit avec la direction de l'axe du plasma. Le principal intérêt de cette structure est qu'elle est stable du point de vue du critère magnéto-hydrodynamique de Kruskal-Shafranov. Signalons en outre la transformée rotationnelle assure une communication entre le haut et le bas du tore ce qui évite la formation d'un champ électrique vertical dû à la dérive magnétique des particules, qui en présence du champ magnétique longitudinal $\vec{B_\varphi}$ aurait pour effet de faire diffuser le plasma vers l'extérieur de la configuration.

La transformée rotationnelle varie de surface en surface, ce qui entraîne que le cisaillement des lignes de force défini par la dérivée de la transformée rotationnelle par rapport au flux à travers une section droite est non nulle. Pour un profil de densité de courant de type parabolique présentant un maximum au centre, ce qui est un modèle assez réaliste le calcul montre facilement que l'inverse de la transformée rotationnelle qu'on appelle facteur de sécurité $q = 1/\iota$ croit depuis l'axe vers le bord. Le cisaillement des lignes de force a pour effet de stabiliser les instabilités MHD localisées par exemple de type interchange et d'un certain nombre de microinstabilités. Une conséquence de l'existence d'une transformation rotationnelle que nous n'avons pas encore mentionnée est la variation du module du champ magnétique lorsqu'on suit une ligne magnétique. Cette variation est due à la décroissance en $1/r$ de l'intensité du champ longitudinal, (r est la distance d'un point à l'axe du tore). Il est donc plus grand à l'intérieur qu'à l'extérieur du tore ce qui entraîne une modulation du module du champ le long d'une ligne s'enroulant sur le tore qui se traduit à son tour par une modulation de la composante de la vitesse d'une particule parallèle au champ magnétique et à la séparation de la population des particules d'un Tokomak en 2 classes. Si la vitesse parallèle au champ magnétique est très supérieure à la vitesse perpendiculaire elle sera peu affectée par la modulation du champ.

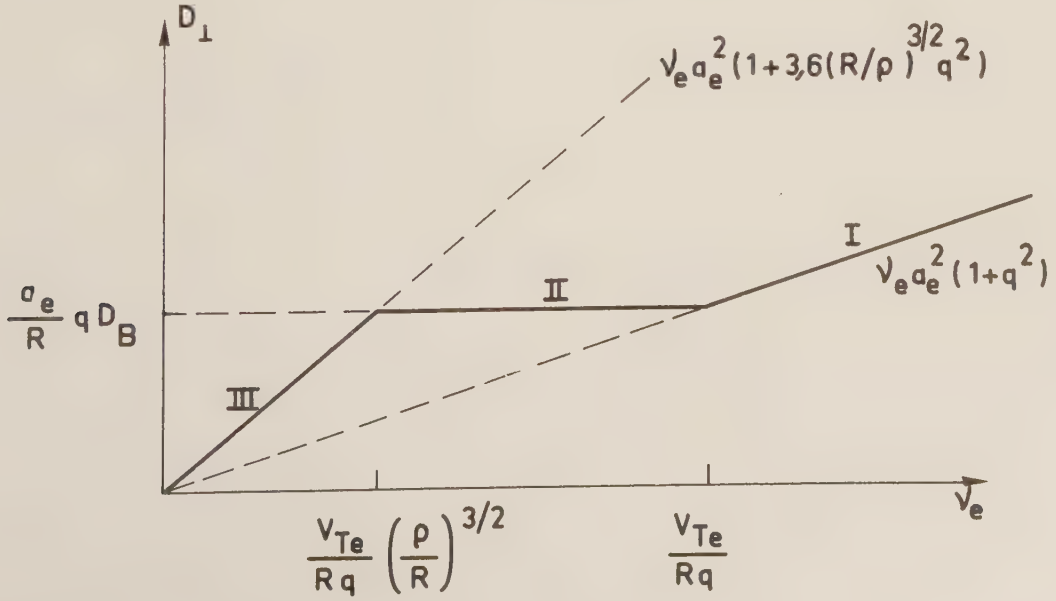
Au contraire si $v_{//} \ll v_{\perp}$, elle sera piégée exactement comme dans un miroir magnétique. Le nombre de particules qui sont ainsi piégées est de l'ordre de la racine carrée du rapport de miroir soit $\sqrt{\rho/R}$. Par suite de la dérive de courbure magnétique v_D une particule ne suit pas exactement une surface magnétique mais est décalée d'une distance donnée par $v_D \tau / 2$ où τ est le temps mis par une particule pour faire un tour de tore. Dans le cas d'une particule piégée la projection de la trajectoire dans une section droite prend l'aspect d'une banane d'épaisseur $v_D \tau$



trajectoire d'une particule circulante

trajectoire d'une particule piégée

L'existence de particules piégées a d'importances conséquences sur la diffusion des particules dans les Tokomaks. La théorie dite "néo classique" /1, 2, 3/ de la diffusion distingue trois régimes en fonction de la fréquence de collision ν_e résumés sur la figure ci-dessous.



Dans le régime I où les collisions sont fortes la diffusion obéit aux formules classiques à des corrections toroïdales près. Il apparaît ensuite un régime II où la diffusion reste stationnaire quand les collisions diminuent puis on pénètre dans le régime III où la diffusion redécroît proportionnellement à ν mais avec une pente $(R/\rho)^{3/2}$ fois plus forte que dans I.

On peut se faire l'idée schématique suivante des trois régimes. Dans le régime I, les collisions sont très fréquentes et les particules diffusent de ligne magnétique en ligne magnétique, sous l'action des collisions, la distance caractéristique de ce mouvement stochastique étant de l'ordre de grandeur du rayon de Larmor des particules.

Dans le régime II, les collisions sont devenues négligeables pour la majorité des particules sauf pour les particules de vitesse lente pour lesquelles la fréquence de collision effective reste grande. La longueur caractéristique qui intervient alors pour la diffusion est le produit de la vitesse de dérive dans le champ magnétique par le temps entre 2 collisions. C'est alors la pondération entre toutes les particules concernées qui conduit au plateau de diffusion.

Dans le régime III la fréquence de collision devient inférieure à la fréquence d'aller retour des particules piégées, la diffusion décroît à nouveau avec ν mais la longueur caractéristique n'est plus le rayon de Larmor d'une particule mais l'épaisseur de la "banane" sur laquelle elle se trouve ce qui explique la pente plus forte.

Nous donnons ci-dessous les différents coefficients de diffusion qui ont été calculés en fonction de :

- la fréquence de collision

$$\nu_{ei} = 510^{-5} \frac{n}{T_e^{3/2}} \quad (s^{-1})$$

- du rayon de Larmor des électrons

$$a_e = 3.365 \frac{T_e^{1/2}}{B} \quad (cm)$$

- du coefficient de diffusion empirique de Bohm

$$D_B = 10^8 \frac{T_e}{B} \quad (cm^2 s^{-1})$$

- du rapport d'aspect local du tore $\frac{\rho}{R}$, où ρ est le petit rayon du Tore et R le grand rayon.

Coefficients de diffusion des particules

$$D_I = \nu_{ei}\, a_e^2 (1+q^2)$$

$$D_{II} = 2\sqrt{\pi}\, \frac{a_e}{R_0}\, q\, D_B$$

$$D_{III} = \nu_e\, a_e^2 \left(1 + 3.6 \left(\frac{R}{\rho}\right)^{3/2} q^2\right)$$

Coefficients de diffusion de l'énergie

électrons :

$$\chi_{eI} = \frac{1+1.6q^2}{1+q^2}\, D_I$$

$$\chi_{eII} = \frac{3}{4}\, D_{II}$$

$$\chi_{eIII} = \frac{1}{9}\, D_{III}$$

ions :

$$\chi_i = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \chi_e$$

quelque soit le régime.

Soulignons que d'après l'expression de χ_e dans la zone banane la fuite d'énergie doit y être considérablement plus faible que la fuite des particules.

CHAPITRE II

BILAN DE LA SITUATION EXPERIMENTALE

1. INTRODUCTION

Bien que l'intérêt des dispositifs de type Tokomaks ait été démontré depuis 1968, il reste assez difficile de faire le point de la situation expérimentale. Il est en effet impossible de se procurer dans la littérature un ensemble de résultats complets correspondant aux mêmes conditions expérimentales et ce, dans une gamme de paramètres assez large pour permettre une comparaison détaillée aussi bien entre l'expérience et la théorie qu'entre diverses expériences. Cette situation devrait s'améliorer quelque peu dans un avenir proche dans la mesure où un nombre important de Tokomaks sont construits dans le monde, tous de classes sensiblement équivalentes mais différents sur un paramètre spécifique (module du champ de guidage $B\varphi$, rapport d'aspect, intensité du courant de chauffage, proximité de la coque conductrice, symétrie de révolution plus ou moins parfaite...)

Dans l'état actuel des choses, on ne dispose en fait de résultats expérimentaux relativement complets que sur trois Tokomaks. Il s'agit de TM 3, T 3 (ou T 4 dans sa nouvelle version) pour les appareils soviétiques, ST du côté américain. La machine TM 3 a été étudiée de façon très approfondie [13,14,15] mais il semble qu'on puisse attribuer beaucoup des anomalies observées à la présence d'importantes quantités d'impuretés de masse atomique élevée en provenance des parois.

Nous axerons donc notre analyse des résultats expérimentaux autour de T 3 en précisant le cas échéant les différences observées sur ST puisque ces deux appareils fonctionnent dans la même gamme de paramètres en complétant le cas échéant notre étude par des observations faites sur d'autres appareils.

Pour terminer ce paragraphe nous préciserons le régime théorique de fonctionnement des dispositifs pour les densités et les températures actuellement atteintes. Le calcul du libre parcours moyen montre que les ions doivent se trouver dans le régime du plateau de diffusion, c'est-à-dire que les taux de diffusion de l'énergie et des particules doivent être indépendants de la fréquence de collision. Au contraire, le libre parcours moyen des électrons les place dans le régime des bananes si bien que la diffusion devrait décroître avec la fréquence de collision. Soulignons enfin que nous discuterons essentiellement les temps de confinement de l'énergie car il est en fait beaucoup plus difficile de déterminer expérimentalement le temps de confinement des particules que le temps de confinement de l'énergie. En effet, le bilan du nombre de particules doit tenir compte de mécanismes opposés : le premier, qui nous intéresse, est la perte de particules par diffusion, l'autre qui est un phénomène parasite est la réinjection de particules chargées provenant soit de l'ionisation, soit d'échange de charge d'atomes neutres réémis par la paroi avec des ions du plasma. Dans le cas des électrons il faut en outre tenir compte d'une augmentation possible de la densité électronique due à l'ionisation multiple d'impuretés lourdes en provenance des parois.

2. BILAN D'ENERGIE DANS LES TOKOMAKS

Suivant L. A. Arstimovitch / 4 / nous schématiserons ce bilan de la façon suivante :

$$\frac{dW}{dt} = Q - \frac{W}{\tau_E}$$

avec W énergie thermique du plasma, Q chaleur dégagée par effet Joule, par unité de temps lors du passage du courant dans le plasma et τ_E temps de confinement de l'énergie tenant compte de toutes les pertes possibles (diffusion des particules, conductibilité thermique, échange de charge, rayonnement)... La mesure de W et Q permet alors de calculer τ_E

2.1 Cas de la composante ionique [5]

A partir du coefficient de conductibilité thermique calculé dans le cadre de la théorie néo-classique, le bilan thermique permet de montrer que la température ionique dans Tokomak doit être proportionnelle à $\sqrt[3]{I B_\varphi R^2 \bar{n} A^-}^{1/2}$ où I est le courant de décharge, R le grand rayon du tore, $B\varphi$ la composante longitudinale du champ magnétique et $\bar{n}$ la densité moyenne du plasma. La figure (1A) donne la courbe T_i tracée en fonction de $\sqrt[3]{I B_\varphi R^2 \bar{n} A^-}^{1/2}$ obtenue à partir de points expérimentaux en provenance de T 3 ou T 4 dans la gamme de paramètres suivants :

$$1{,}5\,10^{13} < \bar{n} < 3{,}8\,10^{13}\ cm^{-3}$$
$$60\ kA < I < 110\ kA$$
$$25\ kG < B\varphi < 38\ kG$$

et de TM 3 avec les paramètres suivants

$$1{,}10^{13} < n < 3{,}10^{13}\ cm^{-3}$$
$$19\ kA < I < 37\ kA$$
$$B\varphi \sim 25\ kG$$

Les courbes I et II sont des courbes théoriques obtenues dans l'hypothèse de différents profils de courant (I courant uniforme dans la section droite du plasma, II courant parabolique) en résolvant l'équation de la chaleur. La courbe pointillé résume les résultats expérimentaux. On voit clairement que l'accord est bon et laisse prévoir un profil de courant plus plat qu'un courant parabolique.

La figure (1B) représente une décharge typique donnant en fonction du temps, la température ionique, le temps de vie de l'énergie des ions et la densité.

2.2 Cas de la composante électronique

Gorbunov et al. [6, 7] ont étudié les variations du temps de vie de l'énergie τ_E des électrons en fonction de divers paramètres de la

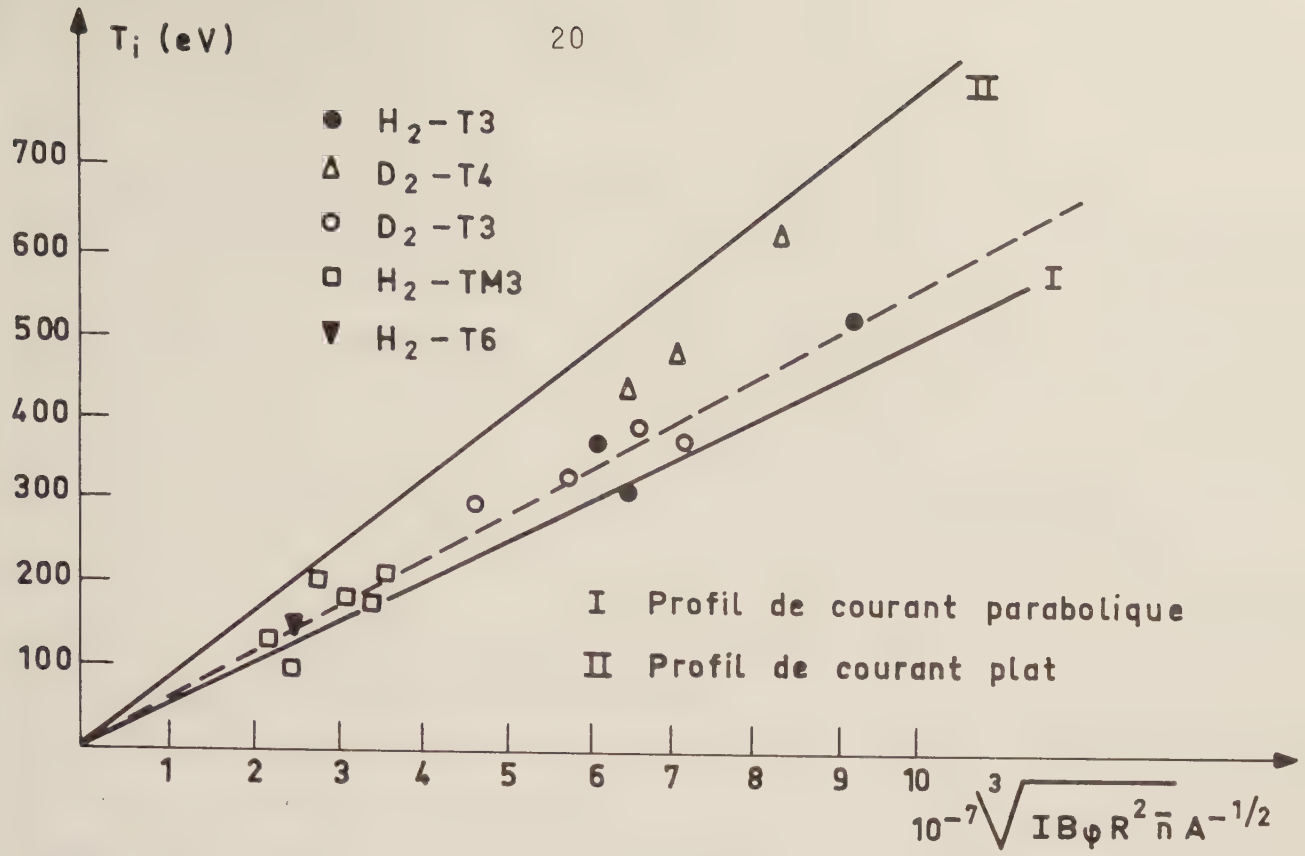


FIG. 1A

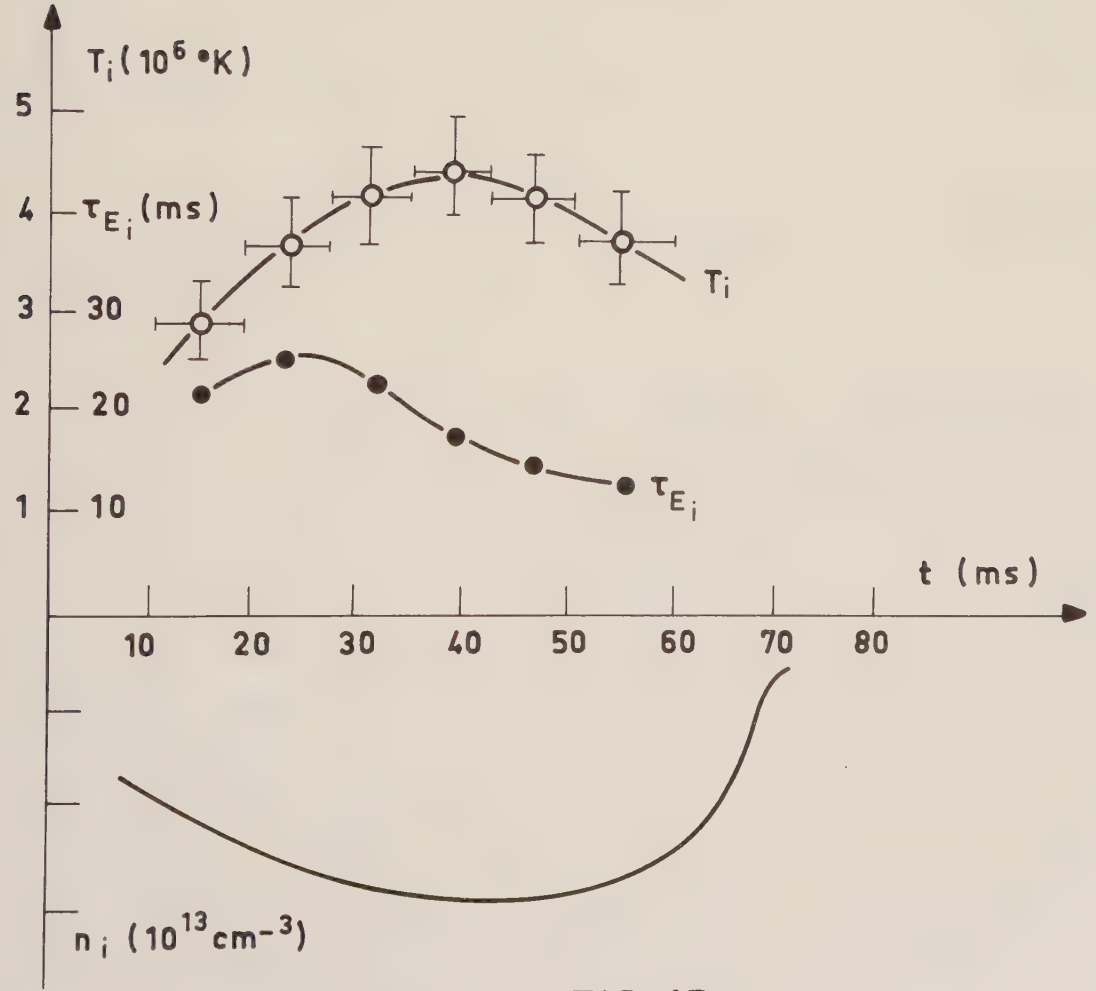


FIG. 1B

(Caractéristiques de la composante ionique dans les décharges de type Tokomak. D'après L.A.Artsimovitch, Rome 1970).

décharge à savoir le champ magnétique longitudinal $B\varphi$, le courant circulant dans le plasma et la densité.

- L'étude de la dépendance de $B\varphi$ à n et $I(t)$ fixé montre que :

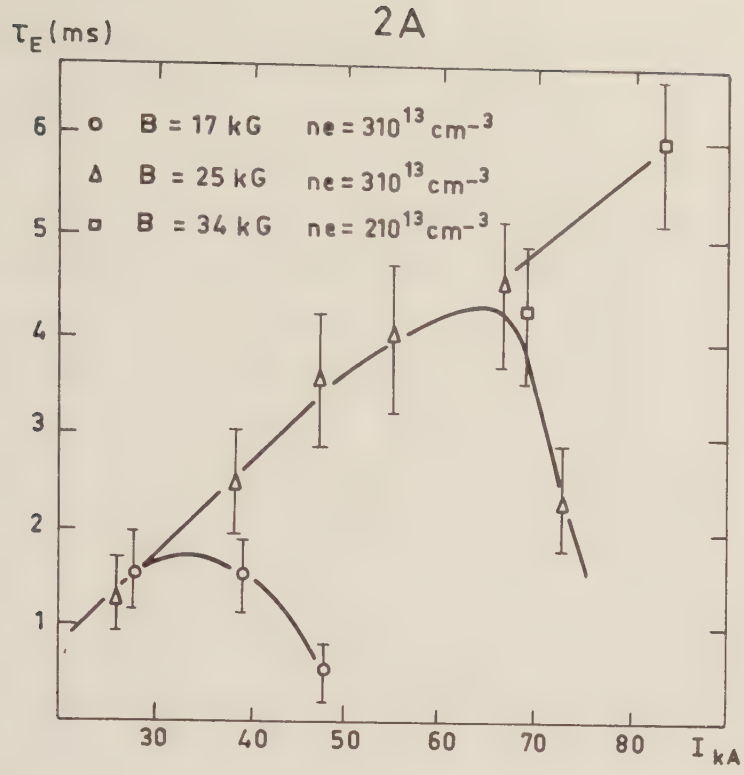
si $n > 2\,10^{13}$ τ_E est indépendant de $B\varphi$

si $n < 2\,10^{13}$ compte tenu de la précision des expériences τ_E est proportionnel à $(B\varphi)^{\alpha}$ avec $\alpha \leqslant 1$

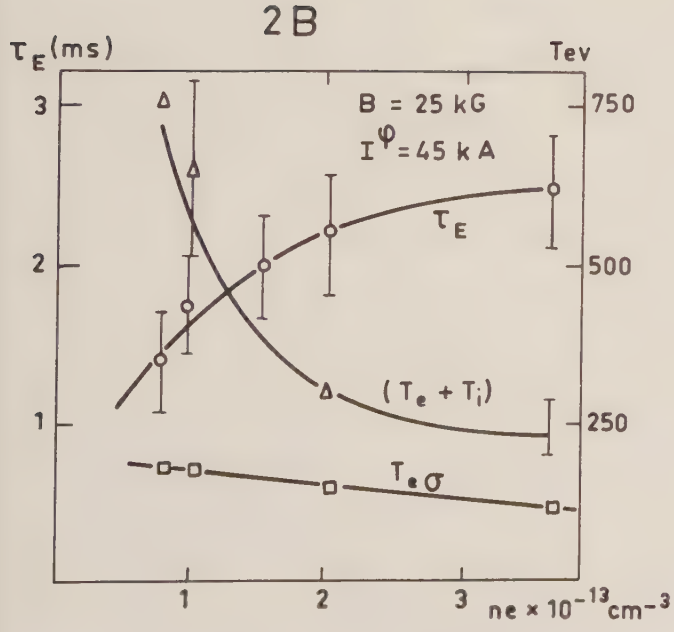
Les résultats des mesures de la dépendance de τ_E en fonction du courant de décharge et donc du champ magnétique azimutal sont représentés sur la figure (2A). On voit que τ_E croît d'abord avec I puis décroît brutalement. Les oscillations de la dérivée du courant qui accompagnent cette chute indiquent des instabilités à grande échelle vraisemblablement de nature MHD. Si $B\varphi$ croît, le maximum de τ_E est repoussé à des valeurs de I plus grandes. Ce calcul sommaire montre que la position du maximum correspond à des valeurs de q moyen $= \frac{1}{\iota} \sim 2.5$ à 3

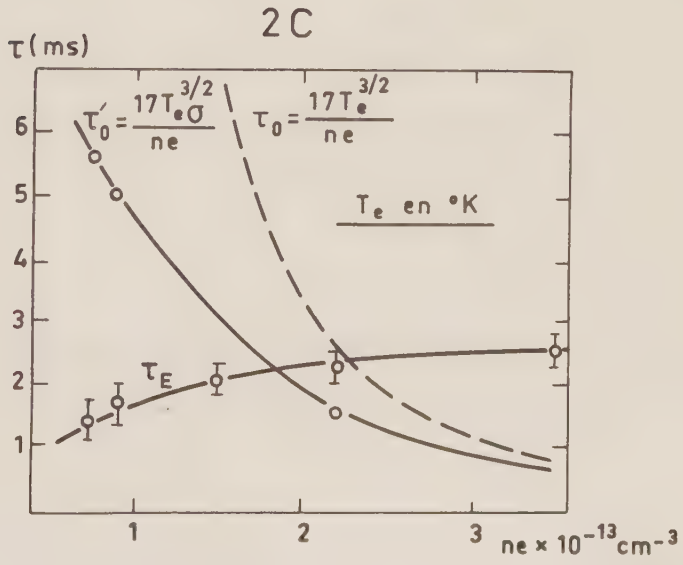
Gorbunov et al concluent donc que pour une colonne de plasma stable l'isolement thermique est proportionnel au courant de décharge et donc à B_θ

Les figures (2B) et (2C) représentent la dépendance de en fonction de la densité électronique. La figure (2B) montre que τ_E croît légèrement avec n_e , alors que la température électronique mesurée par la conductibilité du plasma décroît très légèrement. Sur la figure (2C) on a tracé le temps de vie mesuré de l'énergie des électrons τ_E , le temps de vie correspondant à une diffusion de type Bohm τ_B et le temps caractéristiques d'interaction ion électron τ_0. La comparaison de τ_E et de τ_0 à des conséquences importantes. Supposons en effet que l'isolement thermique du plasma soit déterminé par les pertes ioniques et que les interactions ions électrons soient purement coulombiennes, le temps de vie de l'énergie serait alors déterminé uniquement par le temps caractéristique d'échange d'énergie ion électron τ_0 . Il devrait donc croître notablement lorsqu'on diminue n_e . La comparaison de τ_0 aux résultats expérimentaux montre clairement qu'au moins l'une des suppositions



2A _TEMPS DE CONFINEMENT POUR 3 VALEURS DU CHAMP STABILISATEUR





CARACTERISTIQUES DU TEMPS DE CONFINEMENT DE L'ENERGIE DANS LE DISPOSITIF T3 (D'APRES GORBUNOV ET AL NUCLEAR FUSION 10 (1970))

concernant soit la nature des pertes, soit la nature des interactions est incorrecte. En d'autres termes ou bien les pertes sont essentiellement électroniques, ou bien les interactions ions électrons ne sont pas coulombiennes. Une telle hypothèse concernant la nature des interactions peut être suggérée par le fait que l'écart entre la température $(T_e + T_i)$ et la température $T_{e\sigma}$ déterminée par mesure de la conductibilité électronique croît lorsque n_e décroît. C'est pourquoi on a aussi porté sur le graphique la dépendance du transfert d'énergie τ'_0 en fonction de $T_{e\sigma}$ Cette courbe montre clairement qu'il faudrait un mécanisme de transfert d'énergie 5 à 6 fois plus efficace que les mécanismes coulombiens pour expliquer les pertes pour $n_0 < 5.10^{13}$. Il faut donc attribuer essentiellement les pertes au canal électronique et conclure à leur caractère anormal, les dépendances n'étant absolument pas celles prévues par la théorie néo-classique.

2. 3 Les formules empiriques de L. A. Artsimovitch [8]

Dans les paragraphes précédents nous avons rappelé les résultats les plus caractéristiques concernant les temps de vie de l'énergie des particules dans les dispositifs Tokomaks, l'objet du présent paragraphe est d'établir un certain nombre de "lois d'échelle" empiriques déduites des résultats expérimentaux. A partir de ces lois d'échelles il est possible d'établir un coefficient empirique de diffusion de l'énergie qui "explique" le temps de vie de l'énergie des électrons mais ne donne aucune indication sur les raisons du comportement anormal des électrons.

Supposons qu'on se place dans le régime stationnaire de la décharge ($I(t)$ sensiblement constant). L'énergie contenue dans le plasma varie peu durant cette phase et l'équation de bilan d'énergie conduit sensiblement à

$$\frac{W}{\tau_E} = Q = R_\Omega I^2 = \frac{I^2}{\pi a^2 \sigma_E} \quad (1)$$

a étant le rayon du cordon de plasma et σ_E la conductibilité électrique moyenne du dit cordon. Les résultats de la mesure de l'énergie emmagasinée en fonction de I sont représentés sur la figure (3) donnée par

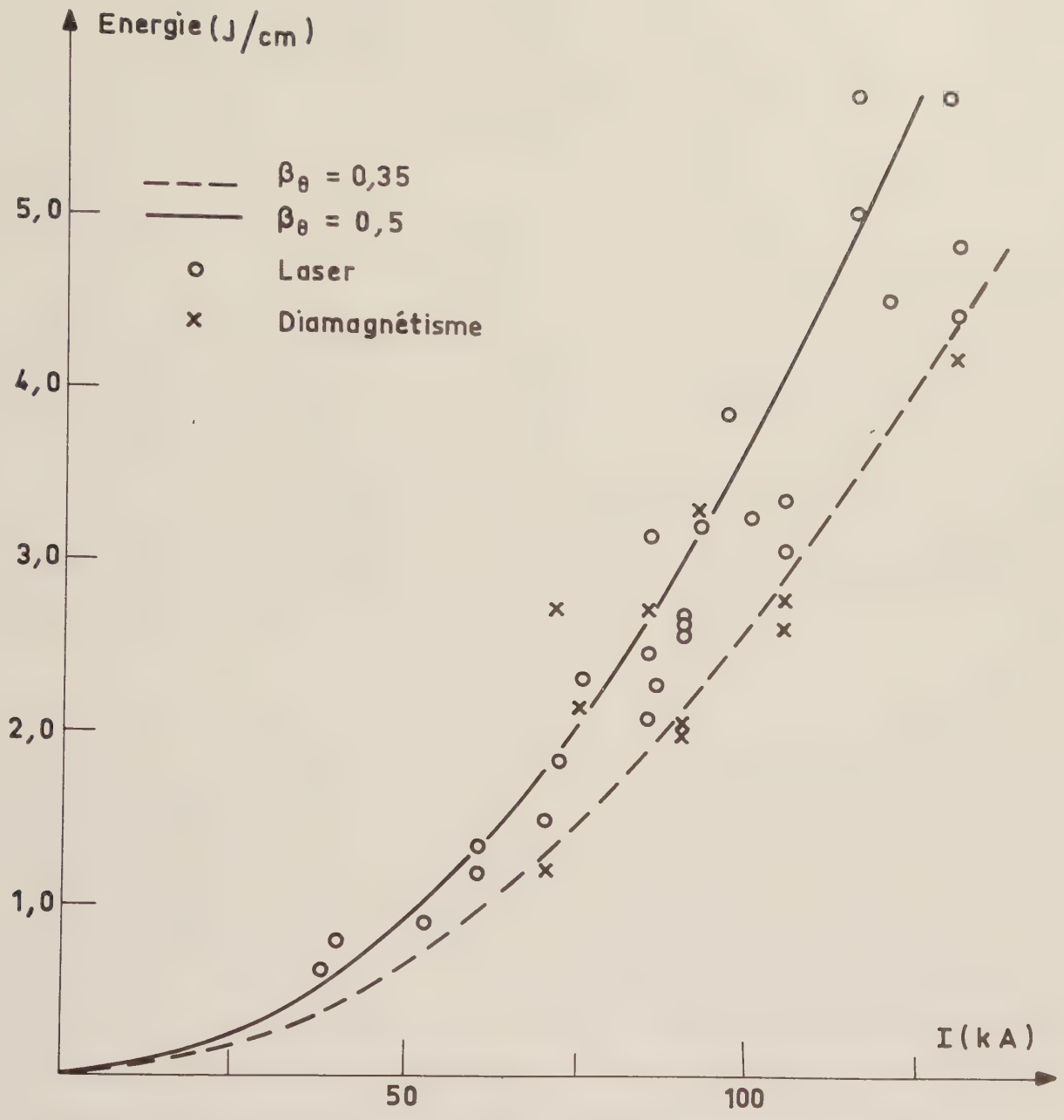


FIG. 3

ENERGIE TOTALE DU PLASMA (J/cm) EN FONCTION DU COURANT DANS LE GAZ

Les points obtenus par mesure du diamagnétisme sont marqués d'une croix, ceux qui proviennent de mesures par diffusion Thomson et de la température ionique par un cercle. (D'après M.J.Forrest et al., CLM-R 107, 1970).

M. J. Forrest et al [9]. Les divers points ont été obtenus dans une gamme de paramètres définis par

$$\begin{cases} 10^{13} < n_e < 3.10^{13} \\ 50\ A/cm^2 < j = \dfrac{I}{\pi a^2} < 200\ A/cm^2 \\ 20\ kG < B_\varphi < 40\ kG \end{cases}$$

On a tracé en trait plein la courbe

$$W = \beta_\theta I^2$$

pour $\beta_\theta = 0.5$. La courbe en pointillé qui ne figure pas sur l'original correspond à $\beta_\theta = 0.35$ valeur utilisée aujourd'hui par Artsimovitch. On déduit alors immédiatement de (1)

$$\tau_E \sim \beta_\theta \pi a^2 \sigma_E \sim 0.35 \pi a^2 \sigma_E \qquad (2)$$

Comme la quantité $\pi a^2 \sigma_E$ définit le temps caractéristique d'effet de peau d'un conducteur ayant une conductivité σ_E on a

$$\tau_E \sim 0.35\ \tau_{peau}$$

Le temps de vie de l'énergie devrait donc être de l'ordre du 1/3 du temps de pénétration prévu par la théorie. Ce point n'est absolument pas vérifié expérimentalement. En réalité on observe une pénétration anormalement rapide du courant. Diverses tentatives d'explication de ce phénomène ont d'ailleurs été proposées [10, 11]. L'une des plus plausibles semble être l'excitation d'une instabilité de courant liée à la forte densité de courant, dans la couche correspondante et à l'absence locale de cisaillement [10]. Par contre la relation entre le temps de vie de l'énergie et le temps de pénétration du courant semble bien satisfaite si l'on se réfère aux temps expérimentaux.

Nous allons maintenant établir une relation liant le temps de vie de l'énergie à la conductibilité thermique moyenne η_E du plasma en régime stationnaire en partant de l'équation de la chaleur.

$$\frac{d}{dt} T_e = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \eta_E \frac{d}{dr} T_e \qquad (3)$$

Cette équation s'intègre immédiatement en faisant une transformée de Laplace sur le temps ou ce qui est équivalent en posant

$$T_e = (\exp - \tau_E t)\ f(r)$$

L'équation (3) se ramène alors à une équation différentielle sur $f(r)$ dont la solution est $f(r) = J_0\left(\sqrt{\frac{\eta_E}{\tau_E}}\ r\right)$ où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 . En écrivant qu'au diaphragme défini par $r = a$ la température est nulle, il vient

$$\tau_E = \frac{a^2}{6\eta_E} \quad (4)$$

On déduit finalement des équations (4) et (2) une relation entre la conductibilité thermique et la conductibilité électrique qui s'écrit

$$\sigma_E \sim \frac{1}{6\eta_E}$$

sachant que la conductibilité électrique est donnée par

$$\sigma_E = \frac{ne^2}{m}\ \frac{1}{\nu}$$

on en tire

$$\eta_E \sim \frac{1}{6}\ \frac{m_e}{ne^2}\ \nu$$

Soulignons que le ν qui apparaît ainsi est déduit de la mesure de la conductibilité électrique et tient compte le cas échéant de la présence de turbulence ou d'impuretés de masse atomique élevée. Lorsqu'on fait apparaître la température électronique et le champ magnétique $B\gamma$ créé par le courant dans la relation $W = 0.35\ I^2$ elle devient avec $\theta = T_e / T_i$

$$\overline{n_e}\ k T_e\ (1+\theta) = 2\,10^{-2}\ B\gamma^2$$

Le coefficient 2.10^{-2} qui intervient est dû au système d'unité u.e.m. utilisé par Artsimovitch
et en remplaçant dans $\eta_E \sim 4\nu\ \varphi^2_{\gamma e}\ (1+\theta)$

$\rho_{\gamma e}$ est le rayon de Larmor des électrons dans le champ poloïdal. Nous adopterons maintenant l'hypothèse de travail suivante : la formule globale que nous venons d'établir est valable localement en écrivant

$$\eta_E = \alpha\ \nu(r)\ \rho^2_{\gamma e}(r)$$

et nous nous proposerons de déterminer α à partir des données concernant le profil de température.

En régime stationnaire l'équation de la conductivité thermique prend la forme

$$\frac{d}{dr}\left(r K_e \frac{dT_e}{dr}\right) = -\frac{j^2 r}{\sigma_E(r)} \qquad (5)$$

avec

$$K_e = \frac{3}{2} n_e k \eta_E(r) = \frac{3\alpha n_e k^2 \sqrt{(r)}\, T_e(r)}{e^2 B_\gamma{}^2(r)}$$

Cette équation suppose que les pertes par rayonnement et par diffusion des particules restent négligeables, hypothèse qui est justifiée par le fait que le temps de diffusion des particules est très supérieur au temps de diffusion de l'énergie.

Montrons d'abord que la relation ainsi obtenue entre $T_e(r)$ et B_γ conduit à la bonne dépendance de T_e en fonction de r . En effet au voisinage de l'axe B_γ est proportionnel à r et par suite

$$\frac{dT_e}{dr} \sim -r^3 \quad \text{soit} \quad T_e(r) = T_0(0)\,(1-\mu r^4)$$

La comparaison avec les résultats expérimentaux donnés sur la figure (4) montre qu'il faut prendre $\mu = 2a^4$. L'équation (5) peut être résolue pour les valeurs de r proche de 0 , elle conduit à

$$T_e \sim T_e(0)\left(1 - \frac{\pi^2}{\sigma_E \alpha} \frac{j_0^4 r_0^4}{n_e^2(0)\, k^2\, T_e^2(0)}\right)$$

où j_0 est la densité de courant sur l'axe magnétique. En prenant comme hypothèse que $j \sim T_e^{3/2}$ et que le profil de température est bien approximé par la courbe en r^4 on parvient à

$$j_0 \sim \frac{2.2\, I}{\pi a^2}$$

En substituant il vient

$$\mu \sim \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\alpha} \frac{I^4}{n_e^2(0)\, k^2\, T_e^2(0)\, a^8}$$

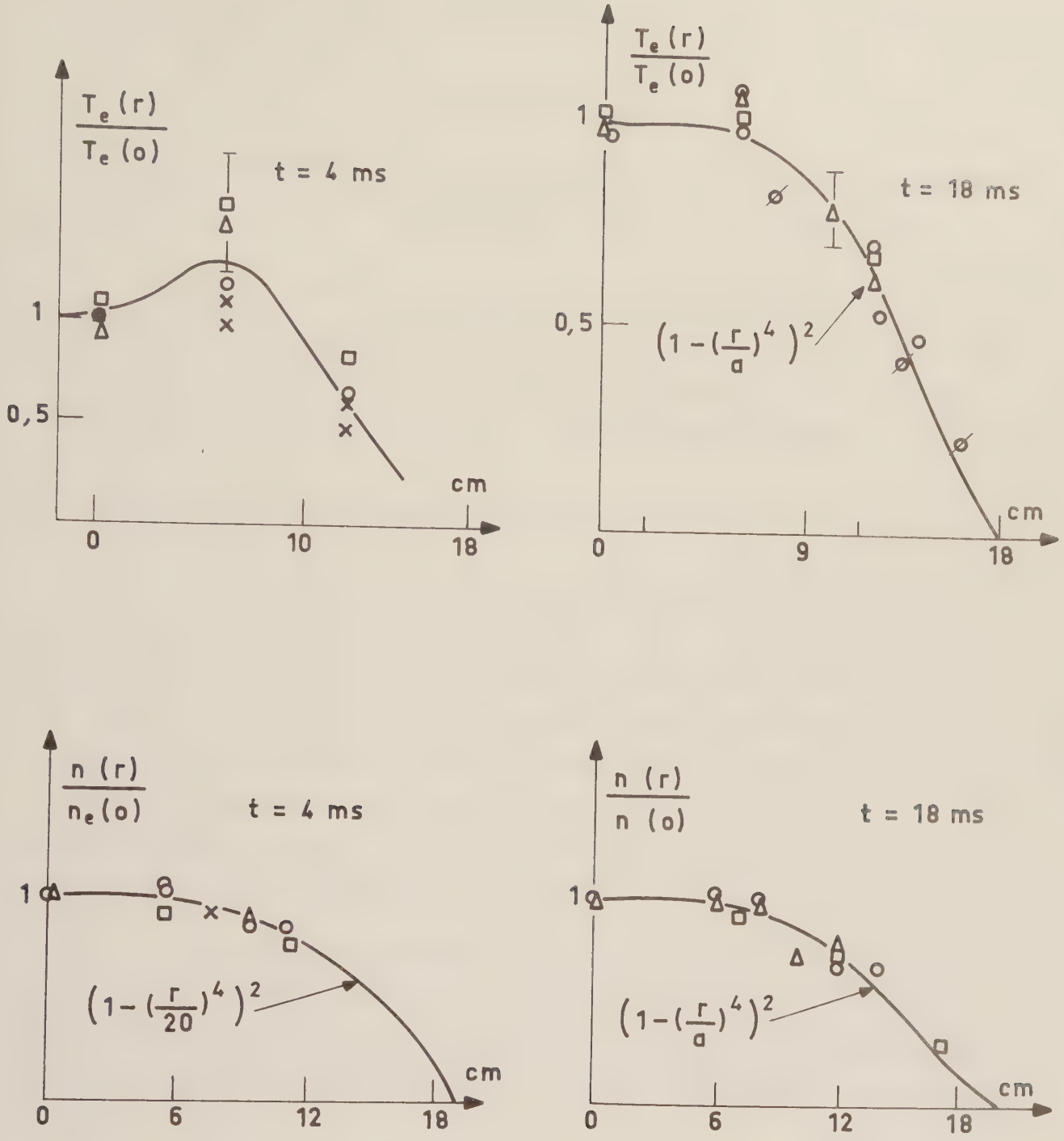


FIG. 4

PROFILS DE TEMPERATURE ET DE DENSITE DANS LE TOKOMAK T3 AUX TEMPS T = 4 ms ET T = 18 ms

(D'après M.J.Forrest et al. CLM-R 107, 1970).

Finalement en tenant compte de la relation $W = \beta_\theta I^2$ pour des mesures effectuées au voisinage de l'axe, on trouve par identification $\alpha \sim 10$ soit

$$\eta = 10\, V(r)\, \rho^2_{\gamma e}(r)$$

Cette relation définit un coefficient de diffusion semblable au coefficient de diffusion thermique classique mais 5 à 10 fois plus important.

Soulignons pour terminer que le coefficient dit "pseudo classique" ainsi obtenu suppose un profil de température et une relation entre la température et la densité de courant bien définis. Un autre profil de température et de courant conduirait à des résultats différents.

2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Le tableau de la page suivante résume la comparaison qui a été faite par Gorbunov, Mirnov et Streklov [6]. La comparaison des valeurs obtenues dans les 2 avant-dernière colonnes montre que l'accord est souvent bon à mieux que 10 %. La dernière colonne correspond à une loi empirique qui avait semblé bonne pour expliquer les expériences sur TM 3 [ ]. Il est clair que cette loi ne s''applique pas à T 3. Il convient cependant de garder présent à l'esprit que TM 3 était une petite machine, dont le plasma contenait beaucoup d'impuretés.

Les études approfondies faites sur TM 3 [12-15] ont montré que tous les paramètres de TM 3 (conductibilité thermique des ions, des électrons, résistivité, coefficient de diffusion des particules) étaient anormaux, de sorte que les comparaisons avec TM 3 sont quelque peu hasardeuses.

Une comparaison plus intéressante pourrait être faite avec ST. Malheureusement à ce jour très peu de résultats comparables à ceux de T 3 ont été publiés. Nous présentons sur la figure 6 ceux qui l'ont été.

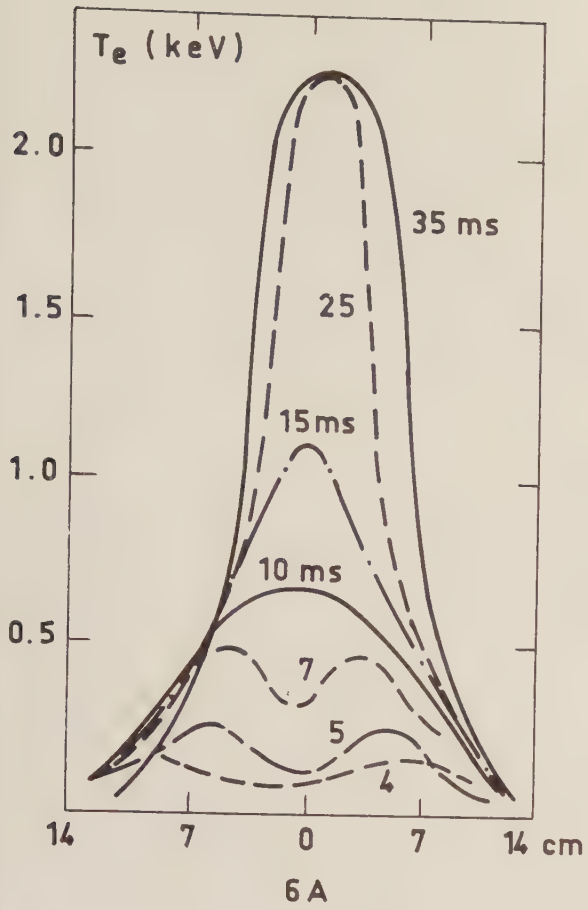
La figure 6A représente l'évolution du profil de température au cours du temps. On y voit clairement un effet de peau qui disparaît beaucoup plus vite que ne le prévoit la théorie néo-classique. Notons

COMPARAISON ENTRE LES POINTS EXPERIMENTAUX ET CALCULES POUR UN CERTAIN NOMBRE DE REGIMES DE DECHARGE

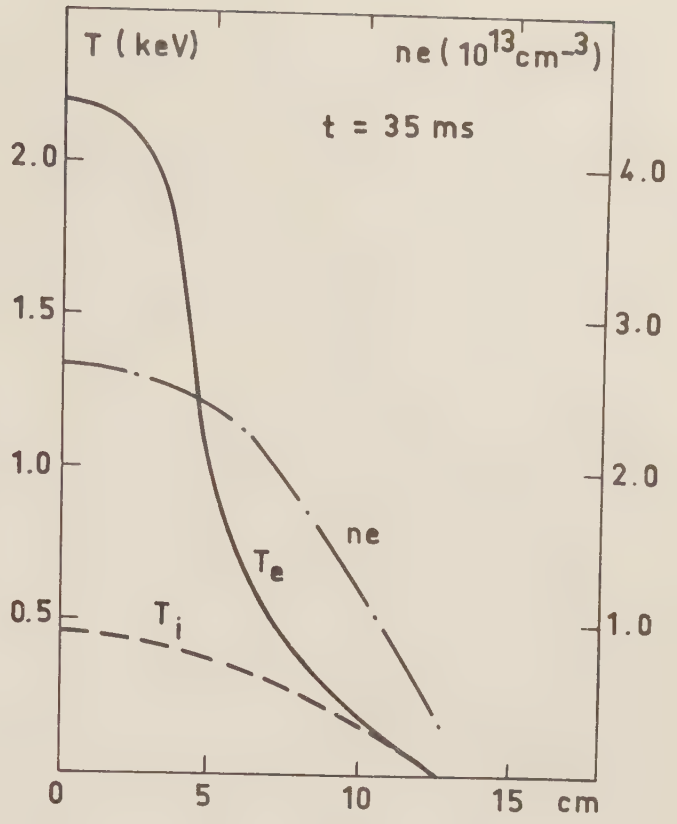
	Points expérimentaux						Points calculés	
N	$n_{eo} \times 10^{-13} cm^{-3}$	I(kA)	τ_E(s)	η	a(cm)	T(eV)	$\tau_E \sim a^2 H_\phi$ $T \sim H_\phi^{6/5} (\frac{\eta}{n})^{2/5}$ T(eV)	$\tau_E \sim a^2 n_e T^{3/2}$ $T \sim \eta H_\phi^2$ T(eV)
0	1.8	45	4×10^{-3}	2.8	11	400	400	400
1	5.5	76	7×10^{-3}	2.8	12	400	420	1350
2	4.4	60	5.8×10^{-3}	2.8	11	400	400	710
3	3.5	45	2.5×10^{-3}	3.7	11	260	350	530
4	3.0	50	4×10^{-3}	2.0	10.5	340	360	380
5	3.0	36	3×10^{-3}	1.5	11.3	180	190	138
6	1.9	77	6×10^{-3}	4.3	11	700	900	1830
7	1.9	60	5×10^{-3}	3.25	11	560	590	750
8	1.4	62	3.5×10^{-3}	6.8	10	800	1000	2200

η est un paramètre caractérisant le degré d'anormalité de la résistivité électrique.
a est le rayon du plasma déduit de la mesure de la température par diffusion Thomson.
(D'après E.P.Gorbunov et al., Nuclear Fusion 10 (1970)).

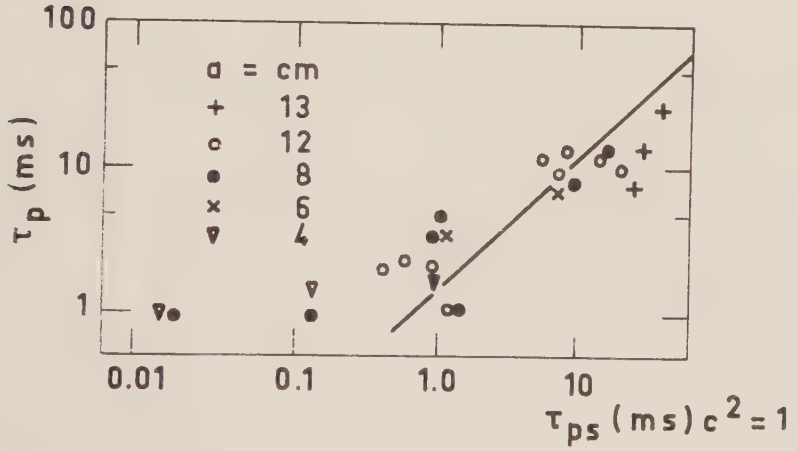
FIG. 5



6A



6B



6C

CARACTERISTIQUES DES DECHARGES DU TOKOMAK ST

6A : Evolution du profil de température électronique en fonction du temps.

6B : Profils de température ionique, de température électro-nique et de densité à t = 35 ms.

6C : Temps de confinement des particules en fonction du temps de confinement pseudo classique.

(D'aprés Stodiek et al. Grenoble 1972)

aussi qu'il y a propagation de l'effet de peau ou plus exactement du maximum de température vers l'intérieur et que ce point est favorable à l'explication proposée dans [10]. Par ailleurs on observe un effet de "piquage" de la température qui n'existe absolument pas sur T 3. Il est malheureusement impossible de faire comparaison avec T 4 l'expérience de diffusion Thomson donnant accès aux profils de température n'existant plus faute de laser.

Les raisons, ou plus exactement les explications, proposées du"piquage"de la température sont encore assez peu claires. Les études en simulation numériques des décharges laissent en principe la possibilité aux deux hypothèses suivantes, soit conductibilité thermique fortement anormale [16], soit réinjection très importante de neutres de la paroi [17]. L'explication proposée par Ware à Madison [18] qui reposait sur le déplacement vers l'intérieur des trajectoires des particules piégées sous l'action du champ électrique parallèle créant le courant ne semble pas devoir être retenu, d'autant que la portée de l'effet en cause semble devoir être très minimisée après des calculs numériques de l'équipe d'Austin [19].

Aucune explication très nette n'a encore été proposée pour justifier les différences de profils observés entre ST et T 3.

Il s'agit peut être de problèmes liés à l'état initial de la décharge, mais une hypothèse qui n'est pas à éliminer est qu'elles seraient dues à la différence des plans dans lequel est fait la diffusion Thomson. La mesure a lieu dans le plan horizontal sur T 3 ce qui oblige à positionner parfaitement le faisceau laser dans le plan vertical contenant l'axe magnétique, alors qu'elle a lieu dans le plan vertical sur ST ce qui affranchit de la contrainte précédente. C'est cette hypothèse qui a fait prévoir sur TFR la possibilité de mesure simultanée dans les 2 plans à partir d'un même faisceau laser.

La figure 6B représente les profils des divers paramètres de la décharge. On constate que le profil de température ionique (inconnu dans T 3) est très plat et que le profil de densité électronique est plus pointu que le profil de T 3.

La figure 6 C représente le temps de confinement des particules en fonction du temps de confinement pseudo-classique. On voit que l'accord est bon dans le domaine des hautes températures mais qu'il y a presque un facteur 10 d'écart dans le domaine des faibles températures. Compte tenu des remarques concernant les réinjections de particules faites au début du chapitre il convient d'être très prudent dans l'interprétation de cette courbe, d'autant que les profils de température étant très différents de ceux de T 3 les coefficients pseudo-classiques ne s'appliquent probablement pas sans corrections.

Une certaine controverse a opposé les physiciens soviétiques aux physiciens américains au sujet du temps de vie de l'énergie. Lors des premières expériences publiées à Madison les physiciens américains pensaient que compte tenu des pertes par rayonnement le temps de vie de l'énergie des électrons était sensiblement normal. Il semble qu'après la conférence de Grenoble, ils admettent eux aussi un temps de vie de l'énergie des électrons anormalement court. Nous terminerons ce paragraphe en indiquant un autre point qui peut venir appuyer l'hypothèse de conductibilité thermique anormale des électrons. Il s'agit des résultats préliminaires [20, 21] de l'expérience ATC (Adiabatic Tokomak Compression). Ces résultats montrent qu'alors que les ions suivent bien les lois de similitude prévues par la théorie il n'en est pas de même des électrons qui atteignent une température plus basse que prévue.

3. LES SIMULATIONS NUMERIQUES DES DECHARGES TOKOMAK

On peut chercher à compléter les résultats expérimentaux par les indications phénoménologiques fournies par les innombrables simulations numériques de décharges de type Tokomak qui ont vu le jour depuis 1969 [16, 22-27]. Quel que soit le raffinement du code et de la théorie néo-classique utilisé les résultats sont identiques, il est impossible d'expliquer les résultats des expériences actuelles en utilisant des coefficients néoclassiques pour la conductibilité thermique électronique. Les différences portent à la fois sur le régime transitoire et le régime asymptotique

En ce qui concerne le premier les différences se manifestent par un effet de peau considérable qui persiste tout au long de la décharge. Nous avons illustré ce fait par la figure (7) extraite des résultats présentés par Düchs et al à la conférence de Madison [51] et qui montre clairement les différences entre le cas néoclassique et le cas pseudo-classique.

Pour terminer nous avons reproduit sur les figures (8) et (9) les résultats obtenus d'une part par Mercier et Soubbaramayer [16] et d'autre part par Dory et al [23]. Dans le cas de Mercier et al on retrouve l'évolution de la température sur ST comme sur T3 ainsi que les profils de température et de densité à partir d'une unique modèle défini par

$$K_i \sim K_i \quad \text{néoclassique}$$

$$K_e = \lambda \frac{n^2}{\sqrt{T_e}} (1 + 1{,}6\, q^2) \qquad q = \frac{r}{R} \frac{B\varphi}{B\gamma}$$

$$\eta_e = 2\eta_e \quad \text{néoclassique}$$

C'est à dire qu'on utilise partout la dépendance de K_e du type Pfirsch et Schlüter. La valeur de λ dans le cas de la figure 8 est de 2000.

Dans le cas de Dory et al on utilise un coefficient de diffusion thermique très proche du coefficient empirique d'Artsimovitch. La figure (9) montre clairement qu'une simple amplification des coefficients néoclassiques est insuffisante pour expliquer les résultats expérimentaux mais qu'il est aussi indispensable de changer les différences fonctionnelles.

Soulignons enfin que dans tous les cas le coefficient de diffusion des particules est supposé classique.

4. CONSEQUENCES

En conclusion des paragraphes précédents nous retiendrons comme hypothèse de travail que la diffusion de l'énergie des ions est sensiblement néoclassique alors que celle des électrons est anormale et approximativement décrite par la formule empirique d'Artsimovitch.

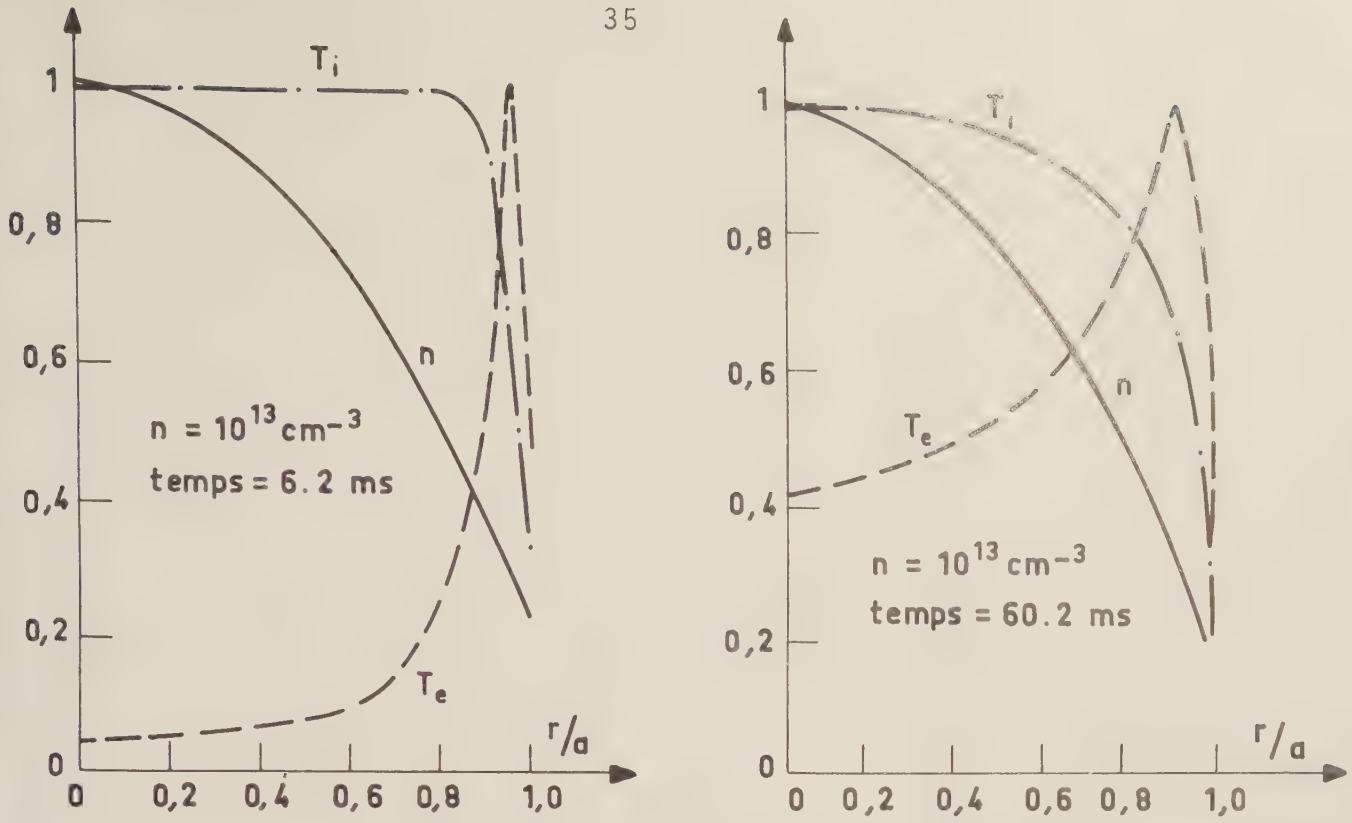


FIG. 7A _ Effet de peau néo-classique

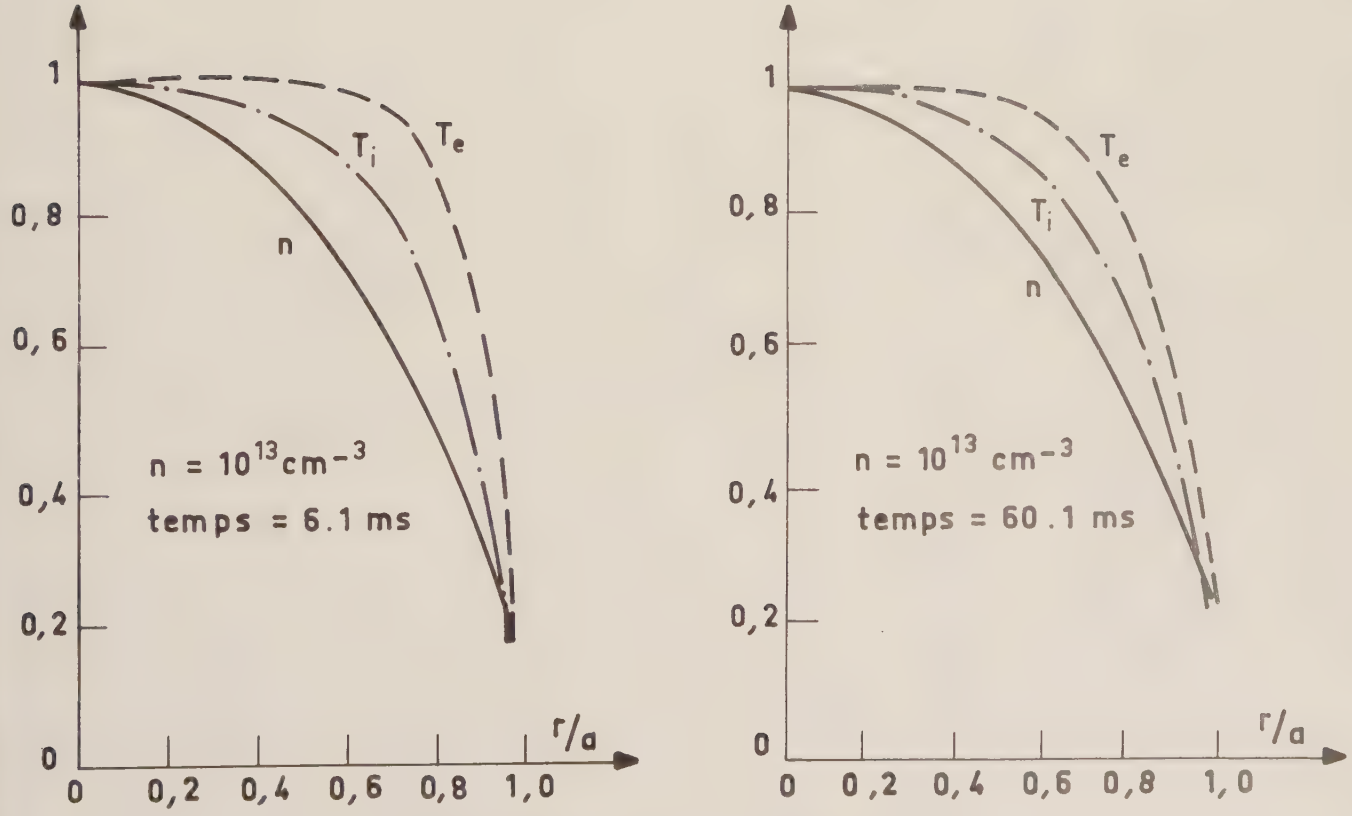
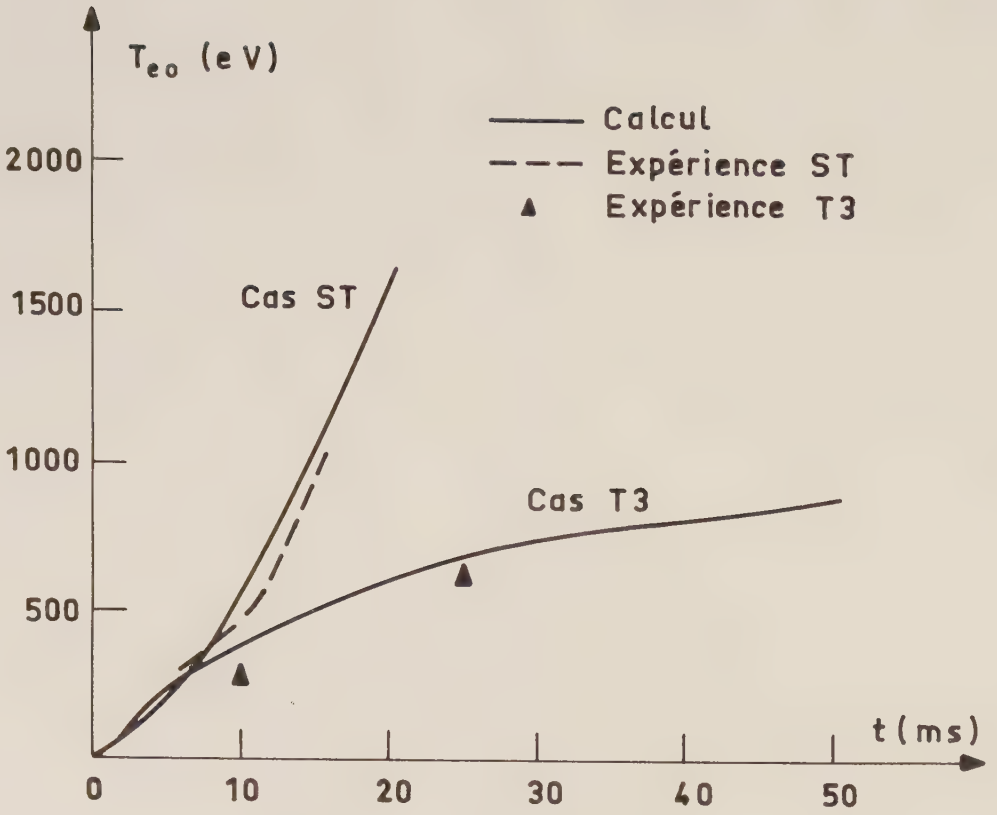


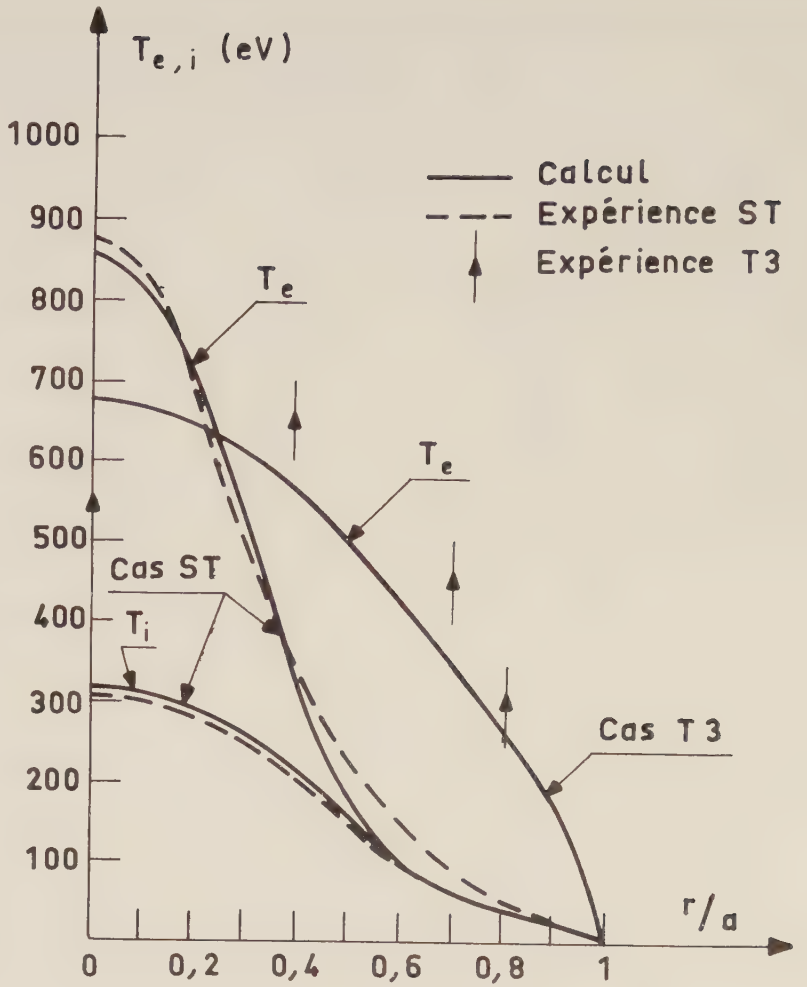
FIG. 7B _ Effet de peau pseudo-classique

VARIATIONS RELATIVES DE T_i, T_e, n

(D'après Düchs et al., Madison 1970, C4 p.369).



EVOLUTION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE SUR L'AXE EN FONCTION DU TEMPS



PROFIL RADIAL DE TEMPERATURE DANS LE REGIME ASYMPTOTIQUE

FIG. 8

(D'après C.Mercier, Soubbaramayer, Conférence Européenne sur la Fusion Contrôlée Grenoble 1972).

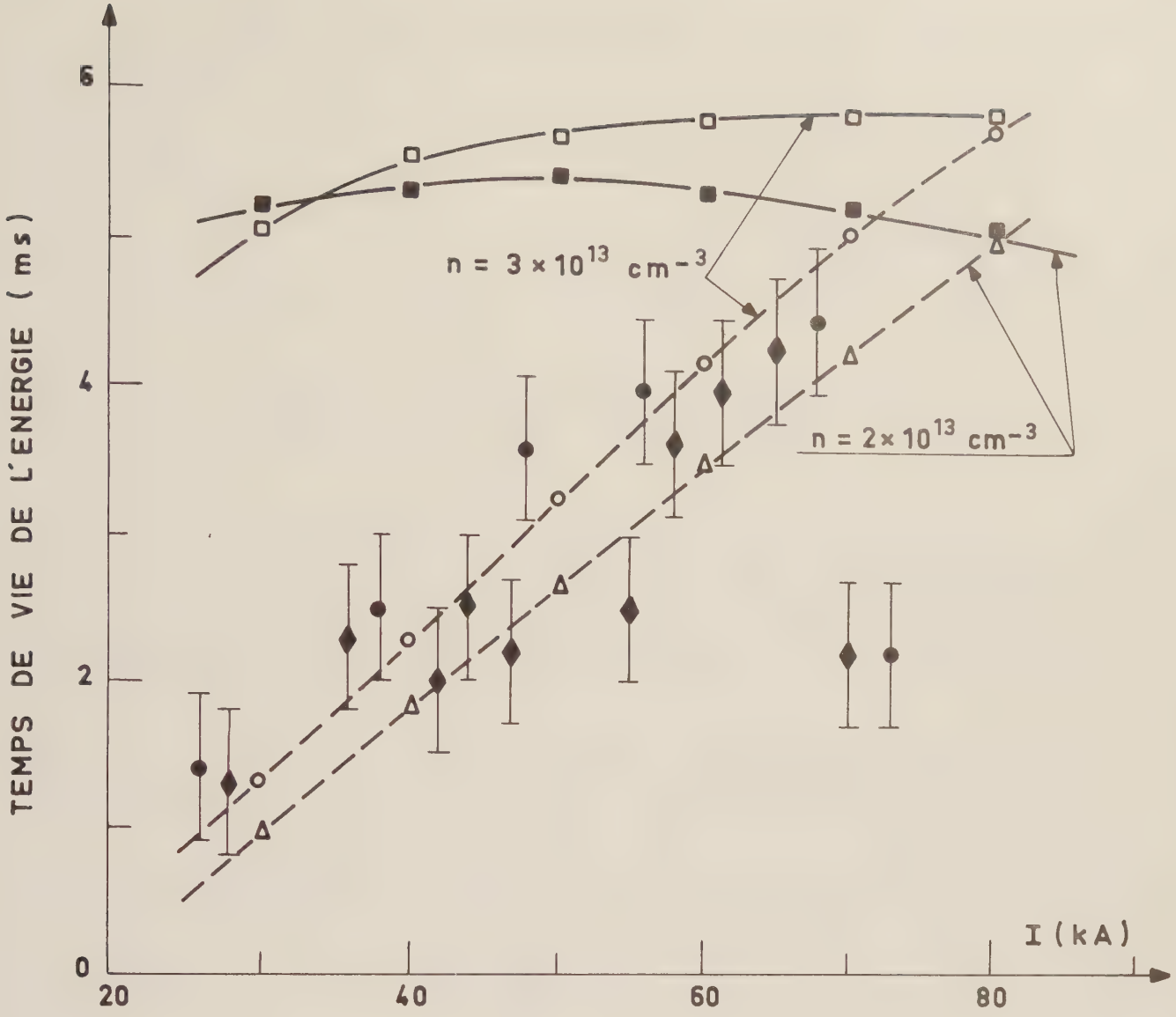


FIG. 9

TEMPS DE CONFINEMENT DE L'ENERGIE EN FONCTION DU COURANT DE DECHARGE

Les données expérimentales sont indiquées avec leurs barres d'erreur ($n=2.10^{13}$ $n=3.10^{13}$ particules par centimètre cube). Les deux courbes en traits pleins sont les résultats calculés à l'aide de coefficients néoclassiques multipliés par un facteur constant (de l'ordre de 10) et les courbes en pointillés ont été calculées en utilisant un modèle empirique semblable à celui d'Artsimovitch.
(d'après M.N.Winder et al., Physics Letters 36A, p.217).

Les collisions coulombiennes étant insuffisantes pour expliquer la diffusion électronique il est naturel de chercher si dans la "panoplie" des microinstabilités recensées il en existe susceptible de provoquer une fuite anormale de l'énergie électronique. Compte tenu des valeurs des paramètres dans le domaine qui nous intéresse et en particulier du cisaillement relativement important des lignes de force dans un Tokomak, le nombre d'instabilités existantes est assez réduit.

Sauf pendant la phase transitoire on peut immédiatement exclure l'instabilité acoustique ionique qui impose [28]

$$u = cs$$

où est la vitesse relative des électrons par rapport aux ions et $cs = \sqrt{T_e}/m_i$ la vitesse du son. Cette condition implique des densités de courant plusieurs ordres de grandeur au dessus de celle qui existe en régime stationnaire.

Du côté des instabilités basses fréquences de type dérive dans le domaine qui nous intéresse, on trouve essentiellement 3 modes [29].

L'instabilité de gradient de température qui nécessite de très fort gradients puisque la condition d'instabilité est [28]

$$\eta = \frac{d \log T_i}{d \log n} > 2$$

Cette instabilité ne peut s'appliquer à T 3 où les gradients de température et de densité restent comparables, ni à ST où le gradient de température ionique reste faible.

L'instabilité d'ions piégés qui est essentiellement une instabilité de dérive dans laquelle les ions piégés jouent un rôle privilégié. Cette instabilité ne peut être dangereuse que dans le régime non collisionnel correspondant aux réacteurs thermonucléaires [30]. L'instabilité collisionnelle correspondante est stable dès que la condition suivante est vérifiée [31] [32]

$$\nu_i \tau_i > 0.4 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{7/18} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{7/6}$$

$$\tau_i = \frac{\sqrt{rR}}{v_{Ti}\xi}$$

Cette condition est largement satisfaite dans le domaine des paramètres correspondant aux expériences actuelles. En outre l'étude de la structure radiale du mode a montré que ce mode était en fait difficile à exciter [33, 34].

La dernière instabilité recensée est l'instabilité d'électrons piégés. Etudié pour la première fois par Kadomtsev cette instabilité est celle qui correspond le mieux au domaine actuel des expériences. Il s'agit essentiellement d'une instabilité de dérive dissipative qui se distingue de l'instabilité de dérive habituelle par le fait que les effets déstabilisants qui interviennent dans ce mode ne concernent que les électrons piégés. Le taux de croissance est maximum lorsque [36]

$$\begin{cases} \nu_{ei} \dfrac{R}{\rho} \sim 5\,\omega_e^* \\ \omega_e^* = a_e V_{Te} \dfrac{d \log n_e}{dr} \end{cases}$$

ceci se produit au voisinage de la limite du régime de diffusion type plateau et du régime banane, soit :

$$\nu_{ei} \frac{R}{\rho} \sim \frac{V_{Te}}{Rq} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{1/2}$$

Cependant cette instabilité est sensible au cisaillement des lignes de force et le critère de stabilité dérivé par Sagdeev et Galeev [29] s'écrit

$$\frac{\rho}{Rq} \frac{d \log q(\rho)}{d \log T_e(\rho)} > 0.1 \sqrt{\frac{\rho}{R}} \frac{1}{\left[1 + \left(1 + \dfrac{d \log T_i}{d \log n}\right) \dfrac{T_i}{T_e}\right]}$$

Cette condition est satisfaite dès que le cisaillement des lignes de force est de quelques pour cent [29, 37]. Ceci est toujours vérifié dans le domaine où les gradients existent et Gorbunov et al ont montré que le cisaillement moyen sur l'ensemble du profil était de l'ordre de 5 % ce qui correspond à un cisaillement local de 10 % à 15 % [7].

En conclusion nous sommes en présence d'une théorie de la diffusion non turbulente ayant atteint sa maturité qui est actuellement extrêmement raffinée et d'autre part d'une diffusion qui expérimentalement semble anormale mais qu'apparamment aucune instabilité existante ne peut expliquer.

L'objet du présent travail est la recherche dans le domaine des paramètres actuels d'une microinstabilité non cataloguée, susceptible de provoquer cette diffusion anormale. Compte tenu des restrictions précédentes sur les microinstabilités existantes elle devait présenter a priori les caractéristiques suivantes :

- être dissipative compte tenu du taux encore élevé de la fréquence de collision efficace sur les particules piégées,
- ne pas nécessiter de gradient de température ionique trop élevé
- ne pas être sensible au cisaillement des lignes de force.

Ce dernier point a une conséquence immédiate sur la structure spatiale de l'instabilité. Rappelons en effet le mécanisme de stabilisation des microinstabilités par le cisaillement des lignes magnétiques. Considérons un mode ayant un vecteur d'onde $\vec{k}$ donné, la projection $k_{//}$ de ce vecteur d'onde sur une ligne magnétique varie de surface en surface par suite du cisaillement et des conditions de périodicité qu'il faut imposer. Par ailleurs nous savons que les ondes dont la vitesse de phase coïncident avec la vitesse thermique des particules sont amorties par effet Landau. Les ondes instables sont donc des ondes ayant de petits $k_{//}$ de manière à ne résonner qu'avec des particules ayant une grande vitesse parallèle et donc en petit nombre. Cependant même si on choisit un mode à $k_{//} = 0$ sur une surface par suite du cisaillement des lignes de force il existe toujours des surfaces où $k_{//}$ est fini ce qui assure rapidement un amortissement du mode. Les seuls modes qui sont insensibles au cisaillement sont les modes localisés le long des lignes de force car on évite alors d'avoir à imposer des conditions de périodicité sur les perturbations, ce qui permet de choisir un $\vec{k}$ différent sur chaque surface.

Nous avons donc cherché un mode localisé. Dans [38] il avait été montré en simulant la courbure par une gravité qu'on pouvait localiser des modes le long des lignes de champ grace au terme de courbure, à condition qu'elle ne soit pas constante. Nous nous sommes donc proposé d'étudier un mode localisé grace à la courbure géodésique des lignes de champ en tenant compte de la géométrie exacte du Tokomak.

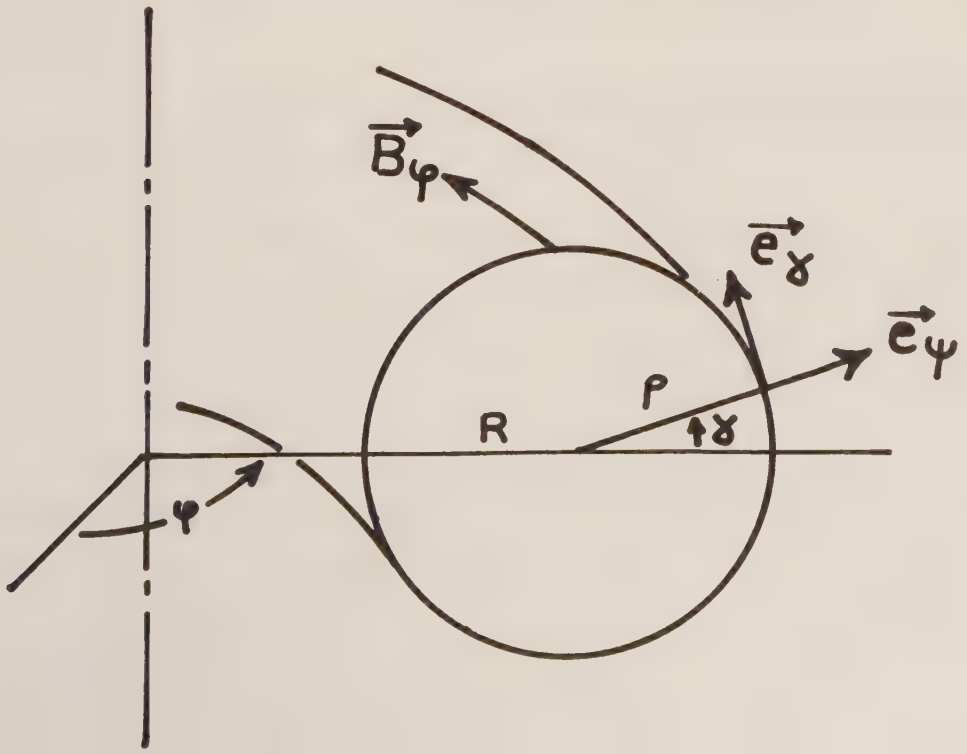
CHAPITRE III

LES MODELES MATHEMATIQUES UTILISES

Dans le présent chapitre, nous définissons le modèle du plasma existant dans les Tokomaks que nous utiliserons et sa description mathématique tant à l'équilibre qu'en présence de perturbations électrostatiques. Comme nous nous proposons d'étudier l'influence des particules piégées dans les inhomogénéités de la configuration magnétique nous ferons évidemment appel à la théorie microscopique qui seule permet de faire une description fine de l'espace des vitesses.

1. LE MODELE DE CONFIGURATION MAGNETIQUE

Nous considérons un plasma torique confiné par un champ magnétique de révolution. Nous assimilerons dans toute la suite les surfaces magnétiques à des tores à sections circulaires concentriques. Ceci n'est vrai qu'à l'ordre le plus bas mais sera suffisant pour décrire les effets de la modulation du champ magnétique dont nous voulons tenir compte. Nous utiliserons les coordonnées toroïdales ψ, φ, γ où ψ définit les surfaces magnétiques φ et γ sont les angles polaires autour de l'axe de symétrie et de l'axe magnétique.



Nous définirons le trièdre de référence par

$$\vec{e}_\gamma = \vec{e}_\psi \wedge \vec{e}_\varphi$$

Le champ magnétique s'écrit alors :

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi - (|\vec{\nabla}\psi| \wedge \vec{e}_\varphi)/r$$

$$= B_\varphi \vec{e}_\varphi - B_\gamma \vec{e}_\gamma$$

B_φ et B_γ sont positifs, r est la distance à l'axe de symétrie du tore. Ce type de configuration magnétique est compatible avec la magnétohydrodynamique qui impose seulement $rB_\varphi = T(\psi)$ où $T(\psi)$ est une fonction arbitraire ne dépendant que des surfaces magnétiques.

2. LE MODELE DE PLASMA A L'EQUILIBRE

Nous adopterons un équilibre strictement compatible avec la théorie néoclassique de la diffusion. Nous prendrons en compte l'existence d'un gradient de température électronique mais négligerons le gradient de température ionique qui est très faible dans les expériences où il est connu (ST) : La théorie néoclassique de la diffusion impose alors de tenir compte d'un champ électrique radial défini par le potentiel $\Phi_0(\psi)$ confinant électrostatiquement les ions.

Les invariants du mouvement non perturbé sont l'énergie totale $W = m_j \varepsilon + e_j \Phi_0(\psi)$ où $\varepsilon = 1/2\, v^2$, le moment angulaire $P_\varphi = \psi - mr/e_j . v_\varphi$ et le moment magnétique $\mu = v_\perp^2 / 2B$ (invariant adiabatique).

Nous admettrons de plus que les ions ont une quantité de mouvement négligeable le long des lignes de force.

Les fonctions de distribution du plasma à l'équilibre sont nécessairement des fonctions des constantes du mouvement $F(\psi, P\varphi, \mu, W)$ Ceci conduit naturellement à utiliser comme coordonnées de l'espace des vitesses les quantités μ et W et un angle θ dénotant l'angle azimutal du vecteur vitesse $\vec{v}_\perp$ autour de la ligne magnétique. Dans ces conditions on montre facilement /39/, /A2/ que la fonction de distribution des ions à l'équilibre s'écrit :

$$f_{oi} = N\left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{3/2} \exp - \frac{W}{T_i} \qquad (6)$$

où N est une constante. La densité des ions s'écrit alors :

$$n_{oi}(\psi) = N \exp - \frac{e\Phi_0(\psi)}{T_i} \qquad \text{avec } e > 0 \qquad (7)$$

En supposant que la vitesse de dérive des électrons est faible devant la vitesse thermique et que la pression est isotrope la fonction de distribution des électrons s'écrit /A2/ /39/ .

$$f_{oe} = F_0(\psi, W_e) - \frac{m_e r}{e} v_\varphi \frac{dF_0}{d\psi} + g(W_e, \mu, \psi) \qquad (8)$$

avec

$$F_{oe}(\psi, W_e) = \left(\frac{m_e}{2\pi T(\psi)}\right)^{3/2} n_0(\psi) \exp - \frac{W_e + e\Phi_0(\psi)}{Te(\psi)} \qquad (9)$$

$g(W_e, \mu, \psi)$ est une fonction impaire de la vitesse parallèle pour les électrons circulants, tandis qu'elle est nulle pour les électrons piégés sa forme exacte est donnée dans A2 . Elle permet notamment d'introduire les modifications de la fonction d'équilibre dues à la présence d'un courant.

3. ETUDE DE L'EQUATION PERTURBEE

Le plasma des Tokomaks étant à β faible ($\beta = \frac{nkT}{2B^2} \ll 1$) nous considérerons des perturbations quasiment électrostatiques. Cette approximation est sensiblement valable pour des ondes de vitesse de phase très inférieures à la vitesse d'Alfen dans le milieu. Cette condition est toujours vérifiée pour les plasmas qui nous intéressent.

Nous nous proposons d'étudier des perturbations variant lentement le long des lignes de force ($k_{//} L \sim 1$) de manière à ne pas être géné par des effets Landau, mais ayant des longueurs d'ondes transversales beaucoup plus petites que les échelles radiales du plasma ($k_\perp \rho \gg 1$) Nous pourrons donc adopter radialement une approximation B K W. Nous écrirons donc les perturbations sous la forme

$$\tilde{\Phi}(\gamma) = \Phi_1(\gamma) \exp i(S - \omega t) \qquad (10)$$

où $S = l(\varphi + q(\psi)\gamma) + k_\psi \psi$ (11)

avec $q(\psi) = \frac{\rho B_\varphi}{R B_\gamma} = \frac{1}{\iota}$ inverse de la transformée rotationnelle

l est un nombre entier. L'expression $\varphi + q\gamma$ est en fait l'équation d'une ligne de force de sorte que S est une constant le long d'une ligne magnétique. Nous supposerons l et $k_\psi |\nabla\psi| >> 1$ de façon à avoir une variation rapide de S sur l'échelle de l'équilibre.

De façon plus générale, nous écrirons toute fonction perturbée sous la forme précédente.

Ayant défini les perturbations que nous étudierons, nous avons le choix entre deux méthodes pour la résolution de l'équation de Vlasov. La première dite des caractéristiques / 40 / consiste à l'intégrer le long des trajectoires non perturbées des particules. Elle ramène le problème de la résolution d'une équation cinétique à un problème de dynamique de particules. La deuxième / 41 / consiste à développer l'équation de Vlasov perturbée en puissance d'un petit paramètre qu'on prend généralement égal au rapport du rayon de Larmor à une longueur macroscopique caractéristique du plasma par exemple l'échelle du gradient de densité. Dans notre travail nous avons adopté le deuxième point de vue qui nous a paru plus commode d'emploi pour le traitement du problème collisionnel.

Le développement ne présente pas de difficulté il est donné en détail dans l'appendice A3 nous n'indiquerons ici que la forme de l'équation à laquelle on parvient.

Nous poserons

$$\tilde{f} = \frac{e}{m}\,\tilde{\Phi}\,\frac{dF_0}{d\varepsilon} + h\,A\,(\psi,\varepsilon) \qquad (12)$$

h est solution de

$$i\,\frac{v_{//}}{Rq}\,\frac{dh}{d\gamma} + (\omega - \vec{v}_D\,.\,\vec{\nabla S})\,h + v_{\gamma E}\,|\nabla\gamma|\,\frac{dh}{d\gamma} - i\,C(h) = \frac{e}{m}\,\Phi_1(\gamma)\,J_0\!\left(\frac{v_\perp\,\nabla S}{\Omega}\right) \qquad (13)$$

Dans l'équation précédente le terme en $\vec{v}_D$ est la somme du terme de dérive magnétique de courbure ($\sim \vec{\nabla B}$) et du terme de dérive électrique ($\sim \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$) . Le terme $v_{\gamma E}$ traduit essentiellement un effet Doppler lié à la rotation du plasma due à l'existence du champ électrique radial. Le terme $C(h)$ désigne un opérateur de collision dont nous discu-

terons la forme dans le chapitre consacré au taux de croissance de l'instabilité.

La fonction $A(\varepsilon, \psi)$ n'est pas la même pour les ions et les électrons car elle dépend des fonctions de distribution à l'équilibre de ces particules, fonctions qui sont différentes dans notre modèle. On a :

$$\begin{cases} -A_{ions} = \omega \, dF/d\varepsilon \\ -A_{électrons} = \omega \dfrac{dF}{d\varepsilon} + \dfrac{ml}{e} \dfrac{dF}{d\psi} \end{cases}$$

Tout le problème que nous nous posons repose sur la résolution de l'équation précédente. Elle s'effectue par perturbation quand on a précisé la "bande" de fréquences qui nous intéresse. La quantité $\frac{v_{//}}{qR}$ est le paramètre du problème. Sa moyenne sur l'ensemble des particules v_{Ti}/qR donne en effet l'ordre de grandeur du temps mis par une particule pour faire une oscillation entre 2 points miroirs ou un tour de tore. C'est la fréquence moyenne d'aller retour des particules piégées. Compte tenu des contraintes définies dans le chapitre I nous chercherons une instabilité dans la bande de fréquences telles que :

$$\omega_{bi} \ll \omega \ll \omega_{be}$$

Ceci implique que du "point de vue" de l'onde il n'y a pas de différence entre un ion circulant et un ion piégé, car il y a eu plusieurs oscillations de l'onde avant que le gros des particules n'ait eu le temps de faire un aller retour. Au contraire les électrons ont le temps de faire plusieurs allers retours (avant que l'onde n'ait oscillé).

Par suite de la distinction précédente le petit paramètre qui intervient dans la résolution de l'équation (13) n'est pas le même suivant qu'il s'agit des ions ou des électrons. Pour les ions c'est ω_{bi}/ω , pour les électrons il s'agit de ω / ω_{be} , le calcul de h pour les électrons impose en outre de traiter séparément les électrons piégés et les électrons circulants. Ils se distinguent en effet par les conditions aux limites : la fonction de distribution des électrons circulants doit être périodique en γ alors que pour les électrons piégés il suffit d'écrire qu'il n'y a pas d'ac-

cumulation de particules au point de réflexion c'est-à-dire que la fonction de distribution des particules qui arrivent en ce point est identique à celle des particules qui en repartent. Le calcul correspondant est détaillé dans l'appendice A3.

Pour déterminer la relation de dispersion, il reste alors à résoudre l'équation de Poisson ou, ce qui revient au même à des termes de longueur de Debye près, à écrire la quasi neutralité du plasma. Il faut donc calculer la densité perturbée des ions et des électrons qu'on obtient par moyenne sur l'énergie des fonctions de distribution perturbées. Le calcul est donné dans l'appendice A3. Les résultats sont rappelés en tête du prochain chapitre dont l'objet est l'écriture et la résolution de l'équation de dispersion.

CHAPITRE IV

ETUDE LINEAIRE DE L'INSTABILITE

1. ETABLISSEMENT DE LA RELATION DE DISPERSION :

Comme nous le montrons dans A 4 la densité perturbée des ions s'écrit :

$$\tilde{n}_i = \frac{e}{T_i} n_0 \left\{ -\Phi_1(\gamma) + \frac{\omega}{\omega - l\omega_E} F(b)\left[\Phi_1\left(1 + \frac{l\langle\omega_D\rangle}{\omega - l\omega_E}\right) - i\frac{l\,\omega_E}{\omega - l\omega_E}\frac{d\Phi_1}{d\gamma} - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - l\omega_E)^2}\frac{d^2\Phi_1}{d\gamma^2}\right]\right\} \quad (14)$$

avec $\omega_E = -\, d\Phi / d\psi$ (15)

$$\langle\omega_D\rangle = \frac{a_i v_{Ti} q}{\rho R}\left(\cos\gamma + \frac{\Lambda}{q}\sin\gamma\right) \quad (16)$$

$$\omega_{bi} = \frac{v_{Ti}}{\sqrt{2}\, q R}$$

$$b = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2}\left(1 + \left(\frac{\Lambda}{q}\right)^2\right) \qquad F(b) = I_0(b)\, e^{-b} \quad (17)$$

$$\frac{\Lambda}{q} = \frac{k}{lq} - \xi\gamma \qquad \xi = \frac{q'\rho}{q} \qquad q' = \frac{dq}{d\psi} \quad (18)$$

$k = k_\psi |\nabla\psi|$ $\qquad a_i = \frac{m_i v_{Ti}}{eB}$ = rayon de Larmor des ions

Rappelons que l'établissement de l'équation (14) suppose que $\omega >> \langle\omega_D\rangle$ et qu'on peut négliger les collisions ion - ion. La fréquence de dérive moyenne $\langle\omega_D\rangle$ dépend du cisaillement des lignes de force par l'intermédiaire du paramètre Λ

En supposant que la fréquence de collision électronique et la fréquence de l'onde soient petites devant $v_{Te}/k_{//}$ (où $k_{//}$ est défini par $\frac{1}{\Phi_1}\frac{d\Phi_1}{Rq\,d\gamma}$) et $\omega_{be}^t = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{1/2} \frac{v_{Te}}{R}$ nous avons montré dans A 4 que la fonction de distribution des électrons circulants était maxwellienne à l'ordre le plus bas et que la première correction provenait des électrons piégés. Nous

nous limiterons pour le moment à la forme symbolique

$$\tilde{n}_e = \frac{e}{Te} n_0 \Phi_1 + \delta \tilde{n}_e \qquad (19)$$

où $\delta \tilde{n}_e$ est la contribution des électrons piégés.

Ecrivant alors $\tilde{n}_i = \tilde{n}_e$, on obtient immédiatement la relation de dispersion

$$\Phi_1 (1+\Theta) - \frac{\omega \Theta F(b)}{\omega - l\omega_E} \left[\Phi_1 \left(1 + \frac{l<\omega_D>}{\omega - l\omega_E} - i \frac{l\ \omega_E}{\omega - l\omega_E} \frac{d\Phi_1}{d\gamma} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - l\omega_E)^2} \frac{d^2\Phi_1}{d\gamma^2} \right] = - \frac{T_e}{e} \delta n_e \quad \text{avec} \quad \Theta = \frac{T_e}{T_i} \qquad (20)$$

Le terme imaginaire s'élimine en posant :

$\Phi_1 = Z \exp i\alpha\gamma$ ou $\alpha = \dfrac{\omega_E(\omega - l\ \omega_E)}{2q\ \omega_b^2}$ Il vient :

$$Z(1+\Theta) - \frac{\omega\Theta}{\omega - l\omega_E} F(b) \left[Z \left(1 + \frac{l<\omega_D>}{(\omega - l\omega_E)} - \frac{\omega_E^2}{4q^2\ \omega_b^2}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_{bi}^2}{(\omega - l\omega_E)^2} \frac{d^2 Z}{d\gamma^2} \right] = - \frac{T_e}{e} \delta n \quad e^{-i\alpha\gamma} \qquad (21)$$

On peut estimer l'ordre de grandeur du potentiel $\Phi_0(\psi)$ à partir de la condition de neutralité à l'équilibre. Posant $\rho_0^{-1} = \frac{1}{n_0} \left| \frac{dn_0}{dr} \right|$ il vient immédiatement

$$\omega_E \sim - \frac{d\Phi_0}{d\psi} \sim - \frac{q a_i V_{Ti}}{2\rho_0 \rho} \qquad (22)$$

Dans ce qui suit nous supposerons $(\frac{a_i}{\rho}) << (\frac{\rho}{R})^{3/2}$ condition toujours vérifiée pour les plasmas qui nous intéressent. α est alors très petit devant un et il est possible de négliger les variations de $\exp -i\alpha\gamma$ c'est-à-dire d'assimiler Z à Φ

2. MODE LOCALISE

Comme il a été montré dans /38 / la dépendance en γ de ω_D permet d'obtenir des solutions localisées. Toutefois, le présence du cisaillement introduit une dépendance supplémentaire en γ par l'intermédiai-

re de Λ . Il faut donc reconsidérer la possibilité d'existence de telles solutions.

Nous cherchons des solutions de (20) localisées le long des lignes de champ d'extension en γ est inférieure à 2π . Il n'est alors pas nécessaire d'imposer de conditions de périodicité à Φ_1

Dans ces conditions la longueur d'onde parallèle n'est pas déterminée par le cisaillement des lignes de champ. Nous supposerons en outre qu'en première approximation on peut négliger δn_e pour déterminer la structure spatiale et la fréquence du mode. Cette hypothèse sera vérifiée à posteriori.

Nous simplifierons enfin l'équation en supposant $b<1$ ce qui permet de développer $F(b)$ sans changer la physique du problème qui nous intéresse. L'équation (20) se réduit alors à :

$$\left[\omega(1+\Theta b) - l\omega_E(1+\Theta) - \frac{\Theta\omega\omega_D}{(\omega - l\omega_E)}\right] Z + \frac{\omega_b^2 \omega\Theta}{(\omega - l\omega_E)^2} \frac{d^2 Z}{d\gamma^2} = 0 \qquad (23)$$

En séparant les termes fonction de γ et les termes indépendants de γ l'équation se met sous la forme

$$Z''(\gamma) + \left[F(\gamma) + C\right] Z = 0 \qquad (24)$$

où $$C = \frac{(\omega - l\omega_E)^2}{\omega_b^2 \omega\Theta} \left[\omega(1+\Theta b_0) - l\omega_E(1+\Theta)\right] \qquad (25)$$

$$F(\gamma) = \frac{(\omega - l\omega_E)^2}{\omega_b^2} \left[b_l \xi\gamma(\xi\gamma - \frac{2k\rho}{l\rho}) - \frac{l a_i V_{Ti} q}{(\omega - l\omega_E)} \frac{1}{\rho R}(\cos\gamma + \frac{\Lambda}{q}\sin\gamma)\right] \qquad (26)$$

$$\text{avec } b_0 = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2} + \frac{k^2 a_i^2}{2} \quad \text{et} \quad b_l = \frac{l^2 q^2 a_i^2}{2\rho^2} \qquad (27)$$

Pour étudier les solutions localisées de l'équation (23) nous l'approximerons par une équation de Weber-Hermite. Ceci conduit à développer $F(\gamma)$ en série de Taylor au voisinage de la valeur γ_m de γ pour laquelle $F(\gamma)$ est maximum.

Il vient

$$Z'' + \left[F(\gamma_m) + C + \frac{1}{2} F''(\gamma_m)(\gamma - \gamma_m)^2 \right] Z = 0 \qquad (28)$$

dont la solution et la relation de dispersion sont données par

$$Z = H_n(\sqrt{\sigma}(\gamma - \gamma_m)) \exp -\sigma(\gamma - \gamma_m)^2 \qquad (29)$$

$$F(\gamma_m) + C = (n + \frac{1}{2}) \sqrt{-2F''(\gamma_m)} \qquad (30)$$

$$\text{avec } \sigma^2 = \frac{F''(\gamma_m)}{8} \qquad (31)$$

Les fonctions H_n sont les polynomes d'Hermite d'ordre n.

Nous devons en outre imposer $\sigma^2 \gg 1$ de manière à rendre $Z \ll 1$ dès qu'on s'éloigne de γ_m et $F''(\gamma_m) < 0$ de manière à être au voisinage d'un maximum. Les relations (30) et (31) imposent alors :

$$\frac{\rho_0(1+\theta b_0)\xi^2}{lq\theta E} < b_l \xi^2 < \frac{\rho_0(1+\theta b_0)}{R\theta} E \qquad (32)$$

avec

$$E = \cos\gamma_m (1 + 2\xi) + \frac{\Lambda}{q} \sin\gamma_m$$

La condition (32) implique

$$\xi \ll qE$$

Si $\xi \ll q$ cette condition est toujours satisfaite. C'est le cas au voisinage de l'axe magnétique où le cisaillement est faible. Dans cette région, la valeur de γ_m ne dépend que de $k\rho/l$ quelle que soit la valeur de ce rapport.

Cependant dans la majeure partie du plasma la condition (32) ne peut être satisfaite que si $\Lambda \gg 1$ c'est-à-dire $k\rho/l \gg 1$. Nous adopterons cette condition dans toute la suite. On obtient alors γ_m en écrivant $F'(\gamma_m) = 0$ ce qui conduit à

$$\cos(\gamma_m - \gamma_0) = \frac{b_l \xi R \theta}{\rho_0(1+\theta b_0)} \qquad (33)$$

$$\gamma_0 = \frac{l q}{k\rho}(1+\xi) \tag{34}$$

$$\sigma^2 = \frac{b_l \Theta\ k\rho\ Rq \sin\gamma_m}{4\ l\rho_0(1+\Theta b_0)} \tag{35}$$

$$\omega = \left(\frac{b_l}{2}\right)^{1/2} \frac{v_{Ti}}{\rho_0} \frac{(1+\Theta)}{(1+\Theta b_0)} \tag{36}$$

Le domaine autorisé pour le paramètre b_l est limité par les conditions $\sigma^2 >> 1$ et $|\cos\gamma_m| < 1$ qui conduisent à la double inégalité :

$$\frac{4\rho_0 l}{k\rho}\frac{1}{qR\sin\gamma_m} \ll \frac{\Theta b_l}{1+\Theta b_0} < \frac{\rho_0}{R\xi} \tag{37}$$

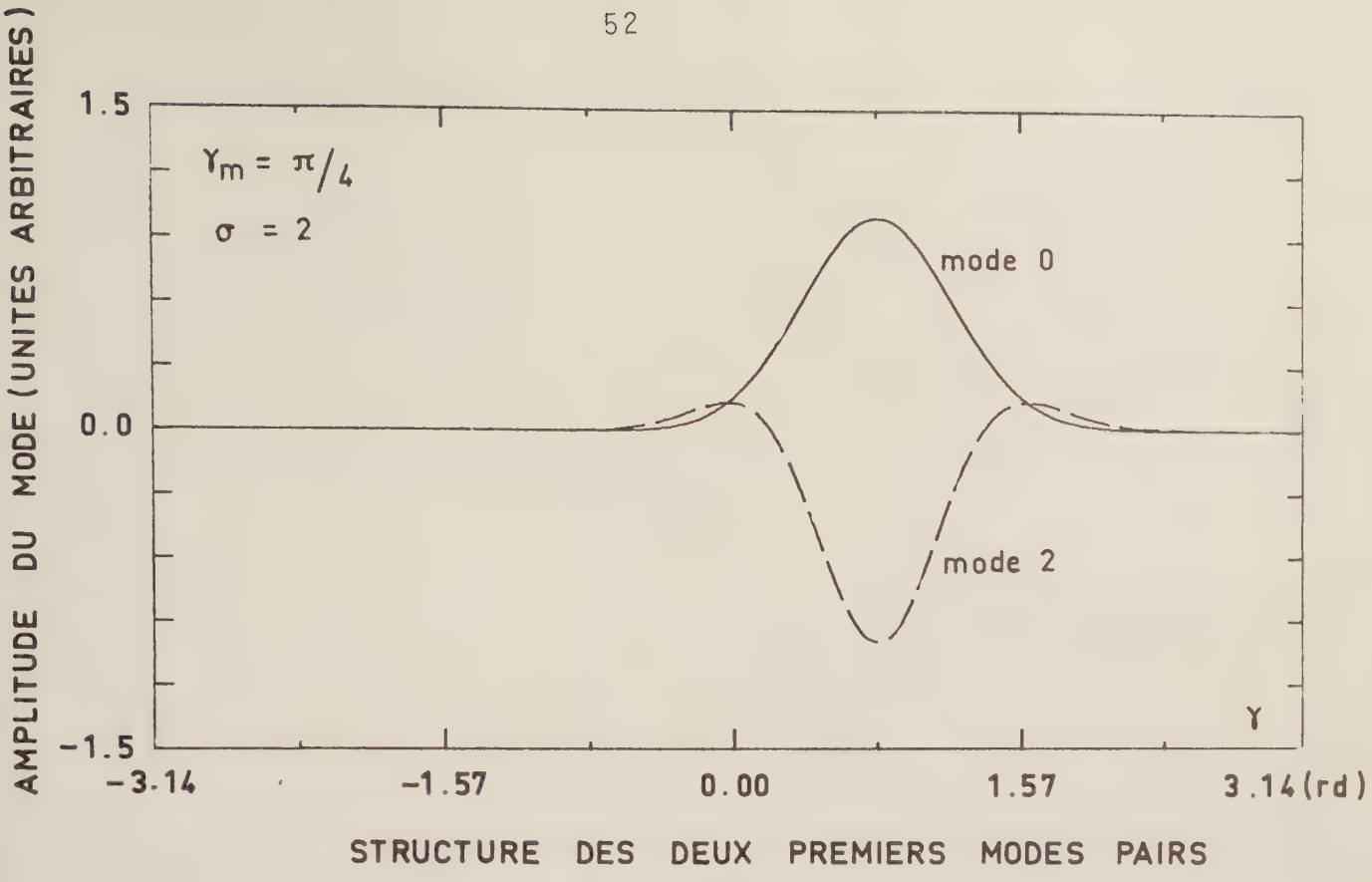
Il convient de souligner que nous avons testé numériquement la résolution de l'équation (23) et qu'il est apparu que la localisation restait bonne même pour des valeurs de q proche de l'unité. pour les valeurs des paramètres qui nous intéressent, on trouve $\frac{\pi}{4} \lesssim \gamma_m \lesssim \frac{\pi}{3}$ et $1<\sigma<3$ ce qui dans le cas le plus défavorable $\gamma_m \sim \frac{\pi}{3}$ $\sigma = 1$ conduit à un résidu de Φ_1 de l'ordre du pour cent pour $\gamma = \pi$, c'est-à-dire à la limite des particules piégées et circulantes. En fait nous nous placerons toujours en deça de ce cas limite et nous pourrons considérer que $\Phi_1 = 0$ pour $\gamma = \pi$ ce qui nous évite d'imposer des conditions de périodicité. Les figures (10) et (11) illustrent ce paragraphe.

Pour conclure ce paragraphe nous mentionnerons un point important :

La condition $\sigma^2 > 0$ entraîne $\frac{k\rho}{l}\sin\gamma_m > 0$ ce qui implique l'absence de résonance avec la fréquence de dérive ionique. En effet ces résonances se produiraient pour

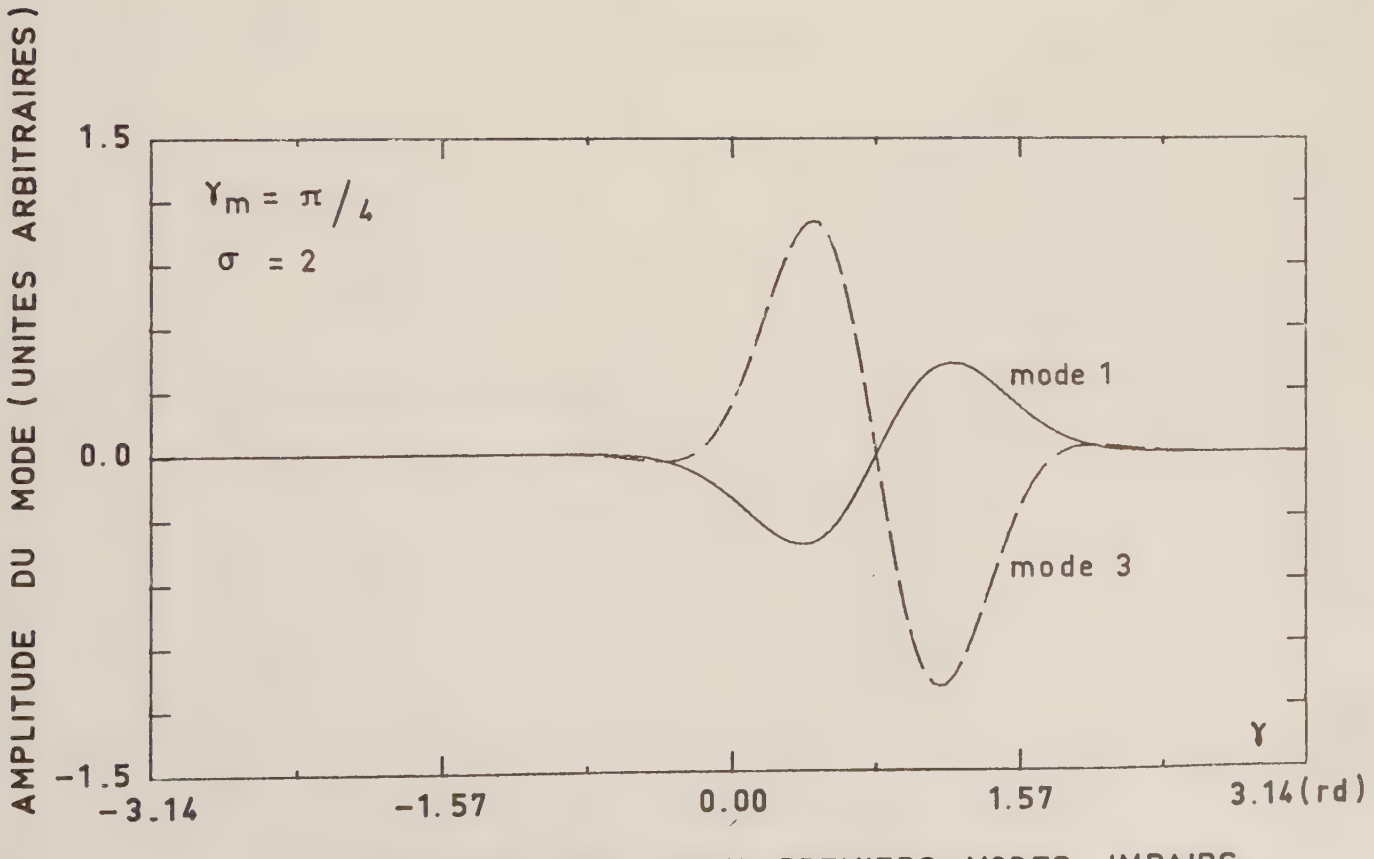
$$\omega - l\omega_E = l\omega_D$$

ce qui est impossible, car d'après (31) la vitesse de dérive magnétique $l\omega_D$ et $(\omega - l\omega_E)$ sont des signes contraires.



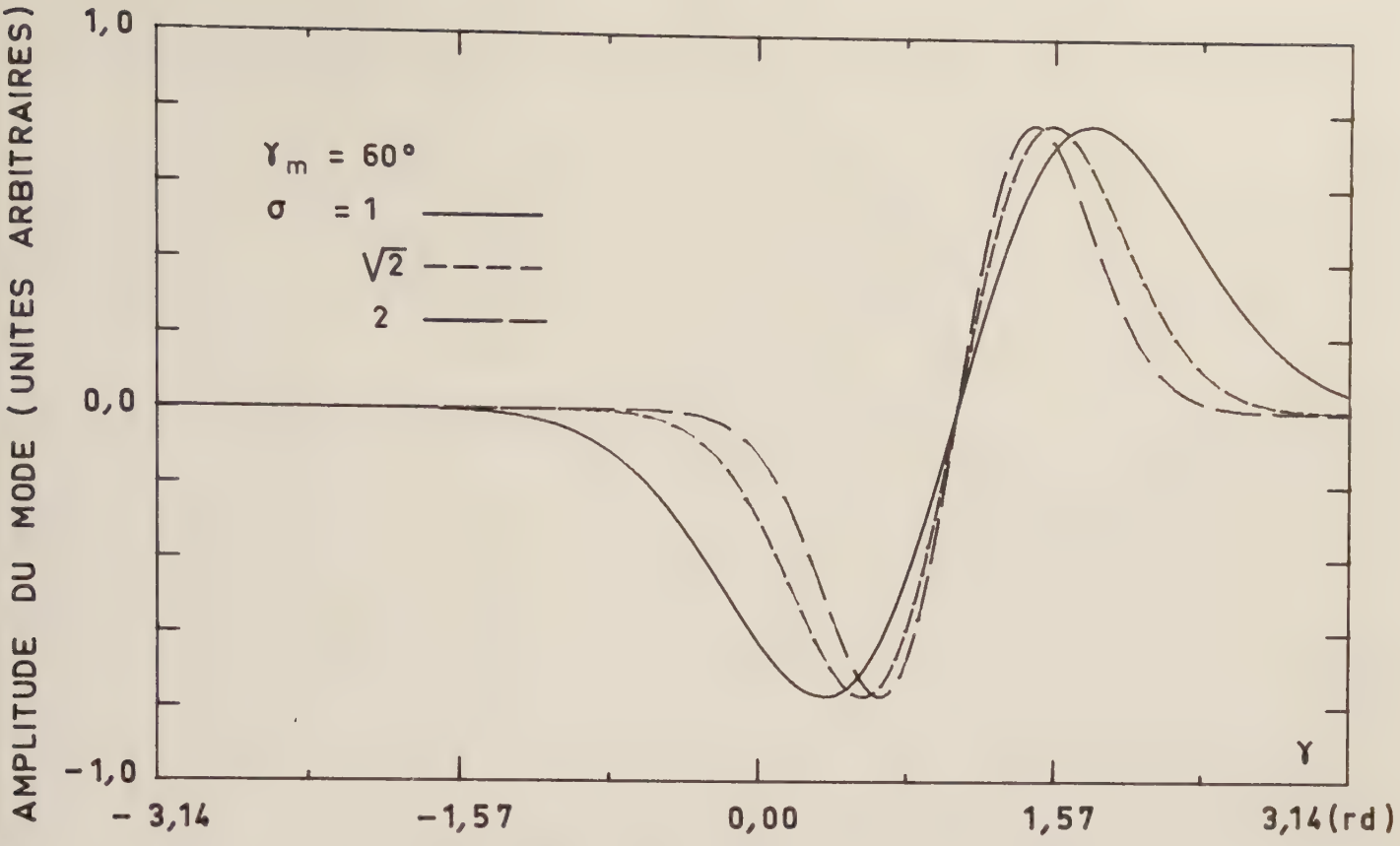
STRUCTURE DES DEUX PREMIERS MODES PAIRS

FIG. 10 A

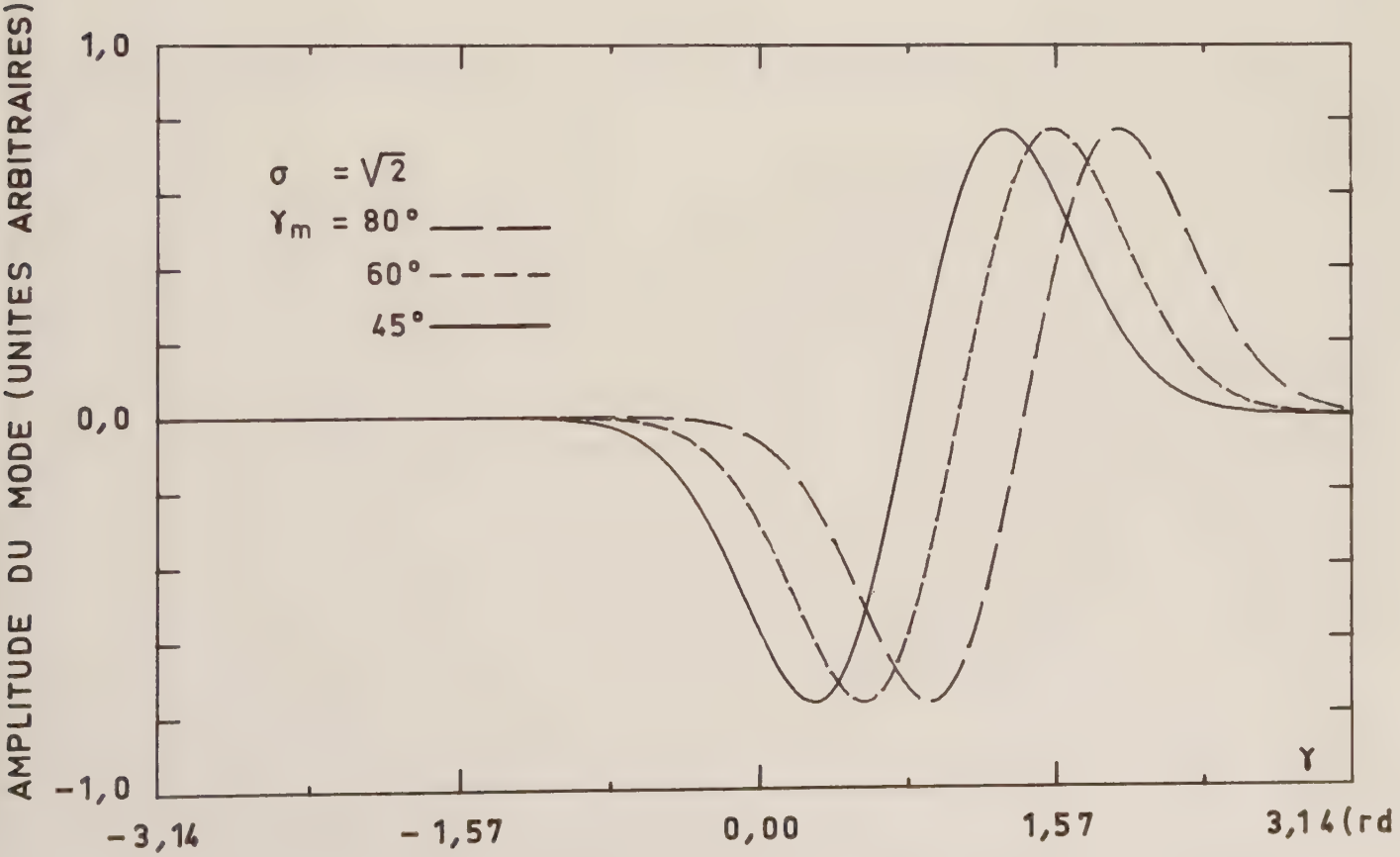


STRUCTURE DES DEUX PREMIERS MODES IMPAIRS

FIG. 10 B

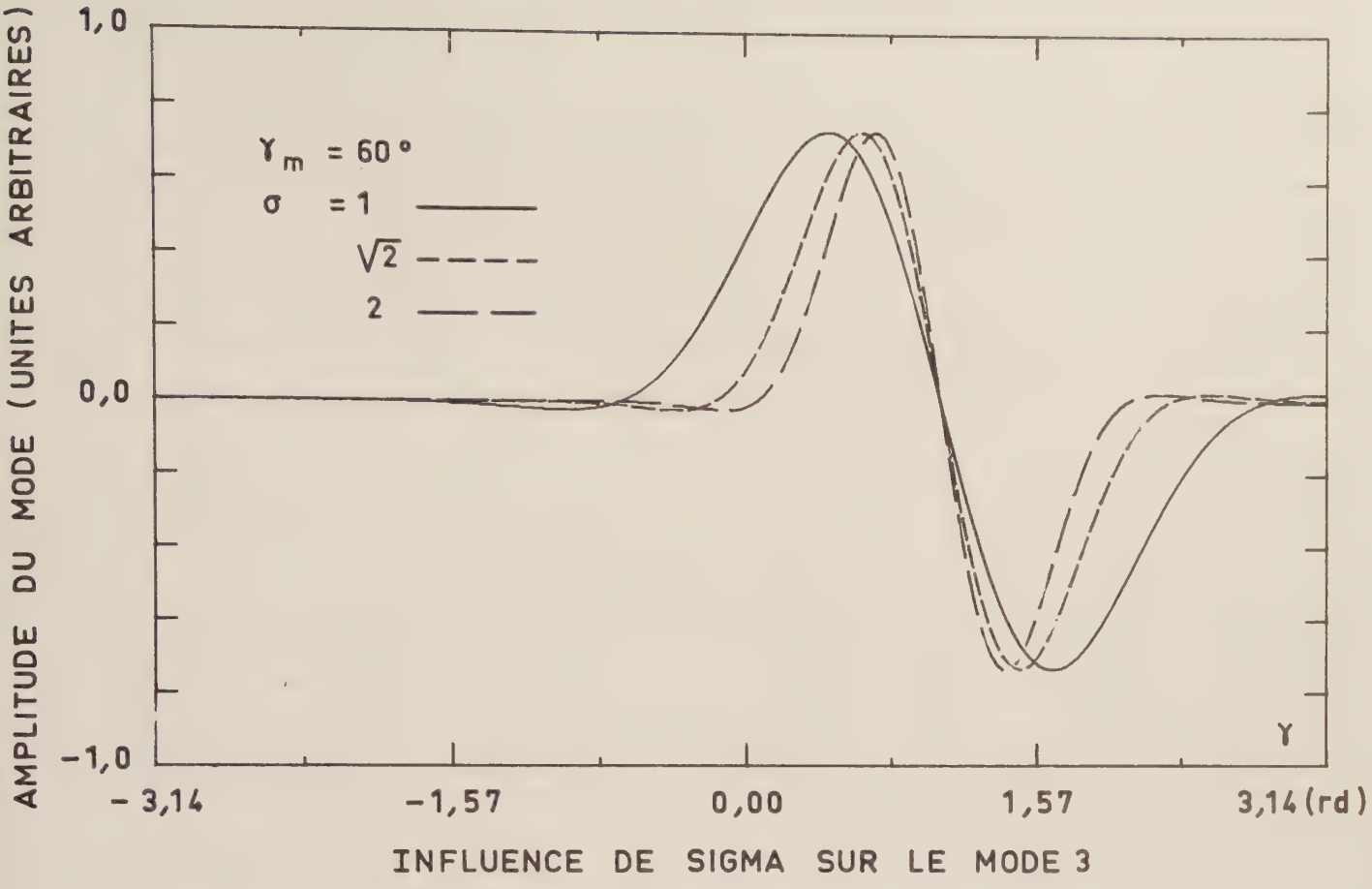


INFLUENCE DE SIGMA SUR LE MODE 1

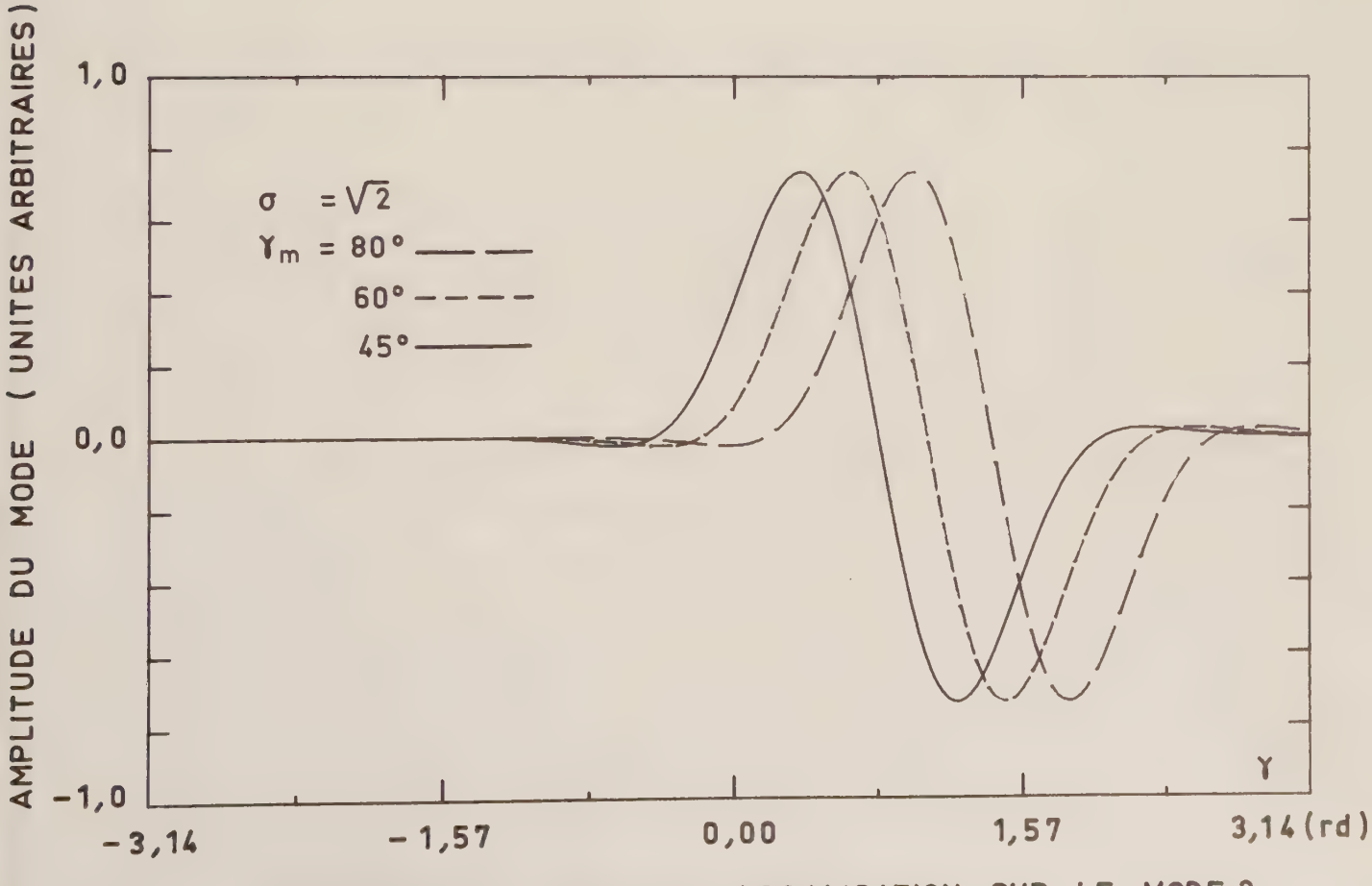


INFLUENCE DU POINT DE LOCALISATION SUR LE MODE 1

FIG.11A



INFLUENCE DE SIGMA SUR LE MODE 3



INFLUENCE DU POINT DE LOCALISATION SUR LE MODE 3

FIG.11B

L'existence du mode est lié à l'absence de ces résonances qui seraient stabilisantes compte tenu du signe de ω_D . Par contre la vitesse de dérive des électrons étant opposée à celle des électrons les résonances électroniques sont autorisées mais elles sont alors déstabilisantes et peuvent dans certaines conditions que nous préciserons par la suite contribuer au taux de croissance de l'instabilité.

3. EFFETS RESONNANTS DUS AUX ELECTRONS

En établissant la relation de dispersion (20) nous avons supposé explicitement que la densité perturbée des électrons circulants restait approximativement donnée par $e\,\Phi_0 n_0/T_e\ (\psi)$. Ceci n'est vrai que si la vitesse de phase parallèle au champ magnétique reste petite devant la vitesse thermique des électrons. Dans ce qui suit nous discutons la validité de cette hypothèse en détails : la densité électronique perturbée $\tilde{f}_e$ s'écrit /A 3 /

$$\tilde{f}_e = \left\{ \frac{e\Phi_1}{T_e} F_{oe} + \frac{ie}{T_e} \left[\omega - l\omega_E(1+\Theta) - l\omega_T \left(\frac{\omega\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] h F_0 \right\} \exp i(S - \omega t) \quad (38)$$

où $\omega_T = \frac{1}{e} \frac{dT}{d\psi}$ et où h est solution de l'équation

$$i \left[-\omega + l\omega_E + l\omega_D \right] h + \frac{v_{//}}{Rq} \frac{dh}{d\gamma} = \Phi_1(\gamma) \quad (39)$$

avec $v_{//} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B}$

Dans l'équation (39) nous avons négligé l'effet des collisions sur les particules circulantes ce qui est toujours justifié dans le domaine des paramètres que nous avons choisi et nous négligerons en outre la modulation de $v_{//}$ due à la modulation de B ce qui signifie qu'on considère des particules "bien circulantes" c'est-à-dire ayant une énergie parallèle très supérieure à l'énergie perpendiculaire. La fonction de dfstribution perturbée des électrons circulants devant être périodique en γ , h doit présenter la même périodicité.

Soit q_1 une valeur de q telle que lq_1 soit entier et ρ_1 le rayon du tore où q prend cette valeur. Pour un rayon ρ voisin nous écrivons :

$q = q_1 + q'(\rho - \rho_1) = q_1 + \delta q$ avec $q(\rho_1) = q_1$

et nous poserons $h = \hat{h}(\gamma) \exp - il q'(\rho - \rho_1)\gamma$ où $\hat{h}(\gamma)$ est une fonction périodique en γ . Il est clair sous cette forme précédente que pour $\rho \neq \rho_1$, h ne peut être périodique. Il faut donc que $\hat{h}(\gamma)$ soit nulle ou négligeable à l'ordre qui nous intéresse. L'équation (39) devient alors :

$$-i\left[-\omega + l\omega_E - \frac{v_{//}}{Rq} l\delta q \right] \hat{h} + \frac{v_{//}}{Rq} \frac{d\hat{h}}{d\gamma} = \Phi_1(\gamma) \exp il\delta q\gamma \qquad (40)$$

En décomposant $\hat{h}$ en série de Fourier sur γ il vient :

$$\hat{h}_n = \frac{-i}{\left[-\omega + l\omega_E + \frac{v_{//}}{Rq}(n - l\delta q)\right]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_1(\gamma) e^{-i[n - l\delta q]\gamma} d\gamma \qquad (41)$$

avec $\hat{h}(\gamma) = \sum_n \hat{h}_n(\gamma) \exp i n\gamma$

Comme nous avons supposé $\omega - l\omega_E \ll v_{Te}/qR$ et $l \gg 1$ il est clair que h_n est négligeable dès que la condition $n - \delta q l \neq 0$ est satisfaite. Cependant par suite du cisaillement des lignes magnétiques, on ne peut éviter l'existence de surfaces telles que $n - l\delta q \simeq 0$. Au voisinage de ces surfaces h_n à une partie imaginaire qui est finie et le calcul montre que le mode est alors fortement amorti si $d \log T_e / d \log n \sim 1$ ce qui est en général le cas. Il faut donc que même si $n - l\delta q = 0$ l'intégrale au second membre de (41) soit négligeable ce qui impose

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_1(\gamma)\, d\gamma = 0 \qquad 42$$

Cette condition est réalisée si on prend un mode impair en γ. Compte tenue du calcul précédent nous choisirons dans ce qui suit des valeurs impaires de m dans (29) et (30). En fait comme nous voulons des $k_{//}$ aussi petits que possible nous nous limiterons au cas m = 1.

Remarquons pour terminer ce paragraphe que (42) n'est alors strictement vérifiée que pour un mode centré autour de $\gamma = 0$ ce qui n'est pas notre cas puisque le mode est centré autour d'un angle γ_m généralement de l'ordre de $\pi/3$. Néanmoins comme par hypothèse $\Phi_1(\gamma)$ est

localisé sur une extension en γ très inférieure à 2π, (42) est satisfaite avec une très bonne approximation.

4. TAUX DE CROISSANCE

Le calcul du taux de croissance de ces modes nécessite l'évaluation de contribution électronique des électrons piégés à la densité perturbée donnée par (19) compte tenu des collisions ainsi que d'effets résonnants sur lesquels nous reviendrons.

Nous supposerons que la fréquence de collision effective est inférieure à la fréquence d'oscillation ω_{be}^{t} des électrons piégés soit :

$$\nu < \left(\frac{\rho}{R}\right)^{3/2} \frac{v_{Te}}{qR} \qquad (43)$$

Cette condition signifie que les électrons sont dans le "régime des bananes". En effet lorsqu'elle est violée le libre parcours moyen est inférieur à une "longueur de banane" et les électrons piégés ne jouent aucun rôle particulier. ν est fréquence de collision électron ion ou électron-électron.

L'opérateur de collision que nous utilisons est un opérateur de Fokker Planck simplifié compte tenu de $v_{//} \ll v_{\perp}$ (A5) [42] [43] pour les particules piégées. Il s'écrit :

$$C(F) = \nu(\varepsilon)\, v_{//} \frac{d}{d\mu} \frac{\mu v_{//}}{B} \frac{dF}{d\gamma} \qquad (44)$$

avec

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{3/2} \qquad \nu_0 = \frac{4\pi n e^4 \log \Lambda_c}{m_e^{1/2}\, T_e^{3/2}} \qquad (45)$$

Dans cette limite on décrit essentiellement la déflexion des particules lors d'une collision. Il manque un terme de friction qui joue un rôle négligeable dans le problème qui nous intéresse compte tenu de la faiblesse des vitesses parallèles en jeu. Par contre, le terme manquant peut être important pour traiter certains problèmes de diffusion /42 /.

En tenant compte des collisions la densité perturbée des électrons devient alors :

$$\tilde{n}_e = \frac{e}{T_e} n_0 \Phi_1(\gamma) + \delta \tilde{n}_e \exp i(S - \omega t) \tag{46}$$

$$\text{avec } \delta \tilde{n}_e = \frac{ie}{T_e} \int \left[\omega - l\omega_E (1+\theta) - l\omega_T \left(\frac{\omega \varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] h F_0 \frac{B d\varepsilon d\mu}{|v_{//}|} \tag{47}$$

h étant solution de l'équation

$$-i\left[-\omega + l\omega_E + l\omega_D \right] h + v_{//} \frac{dh}{dS} = \Phi_1(\gamma) + \nu v_{//} \frac{d}{d\mu} \frac{\mu v_{//}}{B} \frac{dh}{d\mu} \tag{48}$$

$l\omega_D$ est la fréquence de dérive magnétique des électrons.

Pour établir l'équation (47), nous avons supposé que ω , $l\omega_E$ et $l\omega_D$ étaient beaucoup plus petites que la fréquence d'oscillation ω_e^t

La condition (43) est équivalente à $C(h) << \frac{v_{//}}{Rq} \frac{dh}{d\gamma}$ si σ n'est pas trop grand.

Dans ces conditions h ne dépend pas de s à l'ordre le plus bas et est donné par l'équation.

$$i\left[-\omega + l\omega_E + l\bar{\omega}_D \right] h = \bar{\Phi}_1 + \frac{\nu}{\tau} \frac{d}{d\mu} \mu \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{v_{//}}{B} ds \right| \frac{dh}{d\mu} \tag{49}$$

où nous avons introduit

$$\tau = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_{//}} \qquad \bar{\Phi}_1 = \frac{1}{\tau} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_{//}} \Phi_1(\gamma) \qquad \bar{\omega}_D = \frac{1}{\tau} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_{//}} \omega_D$$

s_1 et s_2 sont les abscisses curvilignes sur la ligne de force des points de réflexion des particules piégées.

Rappelons que le champ magnétique d'équilibre peut s'écrire :

$$B = B_0 \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos\gamma \right)$$

L'angle polaire du point de réflexion peut alors être défini par :

$$1 - \frac{\mu B_0}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{R} \cos\gamma_0 + 0\left(\left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right)$$

En exprimant μ en fonction de γ_0 l'équation (48) peut alors se mettre sous la forme

$$i\left[-\omega + l\omega_E + l\bar{\omega}_D\right]h = \bar{\Phi}_1 + \frac{2\nu}{\tau'}\frac{R}{\rho}\frac{1}{\sin\gamma_0}\frac{d}{d\gamma_0}\frac{lwl}{\sin\gamma_0}\frac{d}{d\gamma_0}h \qquad (50)$$

avec $$\tau' = \int_0^{\gamma_0} d\gamma \left[\cos\gamma - \cos\gamma_0\right]^{-1/2}$$

$$w = \int_0^{\gamma_0} d\gamma \left[\cos\gamma - \cos\gamma_0\right]^{1/2}$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2\tau'}\int_{-\gamma_0}^{+\gamma_0} \Phi(\gamma)\left[\cos\gamma - \cos\gamma_0\right]^{-1/2} d\gamma$$

Nous étudierons d'abord le cas où $l\bar{\omega}_D \ll \omega - l\omega_E$

En posant $k = \sin\frac{\gamma_0}{2}$ l'équation (50) devient / A6 /

$$\frac{d^2h}{dk^2} + \frac{G_1}{k}\frac{dh}{dk} + iG_2h = \beta\bar{\Phi}' \qquad (51)$$

avec

$$G_1 = \frac{K(k) - E(k)}{E(k) - k^2K(k)} \qquad \alpha^2 = \frac{\omega - l\omega_E}{\nu\frac{R}{\rho}} \qquad (52)$$

$$G_2 = \frac{4\alpha^2k^2\ K(k)}{E(k) - k'^2K(k)} \qquad k'^2 = 1 - k^2 \qquad (53)$$

$$\bar{\Phi}' = 2\tau'\bar{\Phi} \qquad \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{R}{\rho}}} \frac{k^2}{k'^2 K(k) - E(k)} \qquad (54)$$

$E(k)$ et $K(k)$ sont des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces.

L'équation (51) a été résolue numériquement. Nous donnons des précisions sur la méthode utilisée dans l'appendice A6. Nous mentionnerons malgré tout ici les caractéristiques principales de cette équation.

Elle est singulière en $k = 0$ et $k = 1$. Si $k \to 0$ on retrouve une équation de Bessel avec second membre qui est l'équation qu'on obtient habituellement dans le cadre de l'approximation "fond de puits" c'est-à-dire lorsqu'on résoud l'équation au voisinage du point où le champ magnétique est minimum. Cette approximation est inapplicable ici puisque le mode est localisé autour d'un point $\gamma m \neq 0$. Le point $k = 1$ correspond à la frontière entre les particules piégées et les particules circulantes, la singularité de l'équation coïncide donc avec la singularité dans les trajectoires des particules. Il est naturel d'imposer la régularité des solutions en $k = 0$ et $k = 1$ ce qui détermine alors complètement la solution. On montre facilement que la seule solution régulière en $k = 1$ de l'équation sans second membre tend vers zéro en ce point. Cette condition est souvent imposée à priori dans la littérature nous l'avons donc ici remplacée par une condition plus naturelle de régularité en $k = 1$.

Ayant calculé numériquement la solution de (51) on obtient le taux de croissance en "l'injectant" dans la forme quadratique associée à la relation de dispersion (23).

Nous poserons $Im\,\omega = \gamma_\omega$ et nous supposerons $\gamma_\omega \ll \omega$ il vient

$$\gamma_\omega = \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left[\Gamma_1 b_0 \omega_E \theta (1+\theta) + \Gamma_2 \omega_T \right] \qquad (55)$$

avec $$\Gamma_1 = \frac{1}{n_0} \frac{l\omega_E \theta}{\int |\Phi_1^2| d\gamma} R_e \int h\Phi^* F_0 \frac{B\, d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|} d\gamma \qquad (56)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{n_0} \frac{l\omega_E \theta}{\int |\Phi_1^2| d\gamma} R_e \int h\Phi^* F_0 \left(\frac{\omega\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{B d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|} d\gamma \qquad (57)$$

Γ_1 et Γ_2 sont des coefficients sans dimension qui ne dépendent que de α , γ_m, σ avec $\alpha = \left(\frac{l\omega_E \theta \rho}{v_0 R} \right)^{+1/2}$. L'intégration ne porte que sur les particules piégées.

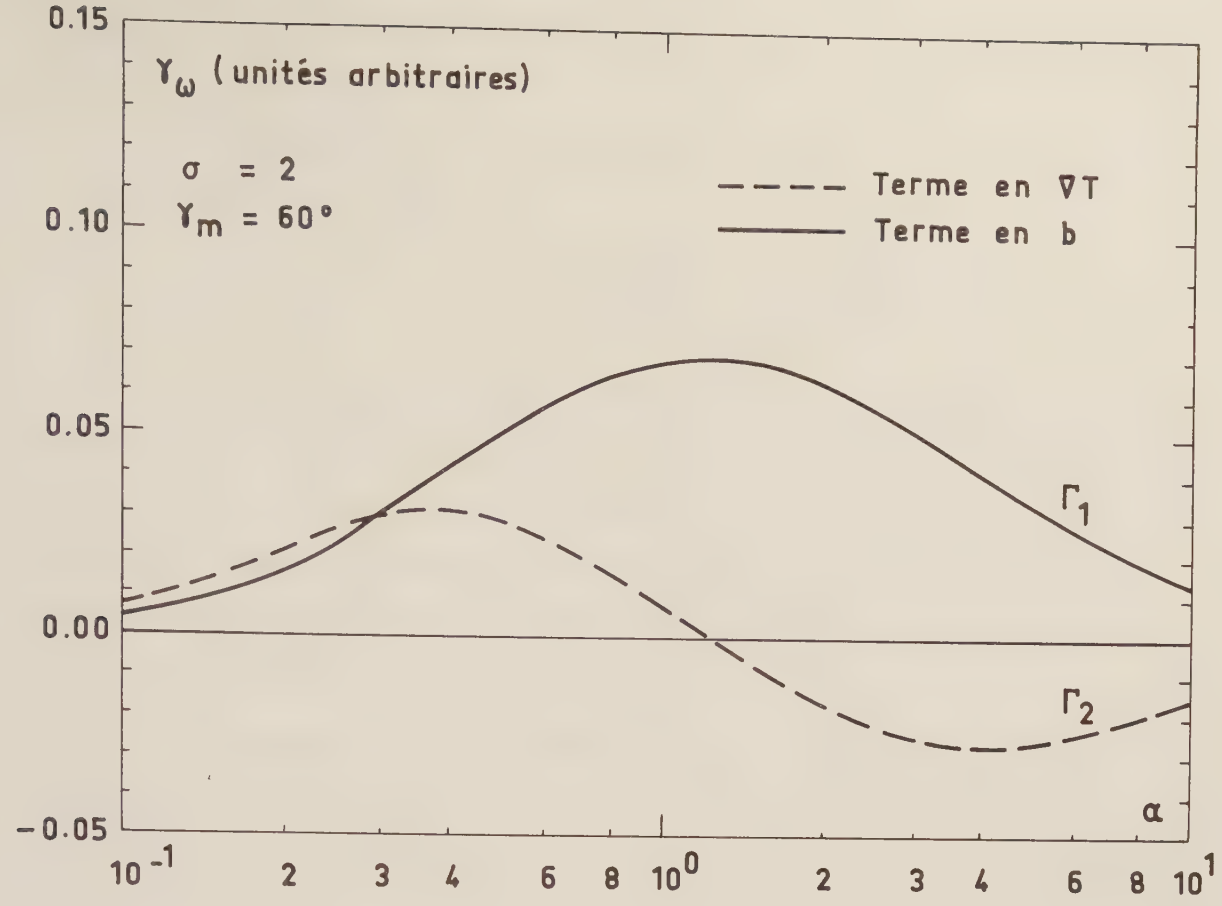
On montre facilement d'après (23) que $R_e \int h\Phi^* d\mu$ est toujours positive. Il en résulte que Γ_1 est toujours destabilisant alors que Γ_2 n'est déstabilisant que si la contribution de la queue de la fonction de distribution c'est-à-dire les particules à haute énergie domine la contribution des particules à faible énergie.

Nous avons tracé des courbes typiques de Γ_1 et Γ_2 sur la figure (12) Il est visible que Γ_2 ne contribue à l'instabilité que si α est petit c'est-à-dire $\alpha \lesssim 1$. Pour α grand Γ_2 devient stabilisant et supprime rapidement le mode si $d \log T_e / d \log n > b$. Il est important de souligner que l'utilisation d'un opérateur de Batnaghor Gross et Krook (B G K) à la place de l'opérateur de Fokker Planck conduit à une réduction considérable de Γ_2 par rapport à Γ_1 réduction qui diminue considérablement l'influence sur la stabilité du gradient de température. La résolution correcte conduit à Γ_1 de l'ordre de 0.1 et si $d\log T_e / d\log n \sim 1$ et $b \sim 0.5$ la figure 1 montre clairement que les contributions sont du même ordre. Cette différence considérable de comportement entre les deux opérateurs semble due au fait que l'opérateur de B G K décrit les collisions d'une façon proche d'une friction alors que le rôle des collisions dans le problèmes que nous étudions correspond davantage à une déflexion angulaire.

5. EXPONENTIATION

Nous avons mentionné lors de l'étude de la structure du mode que la condition $\sigma^2 > 0$ entrainait

$$\frac{k\rho}{l} \sin \gamma_m > 0 \qquad (58)$$



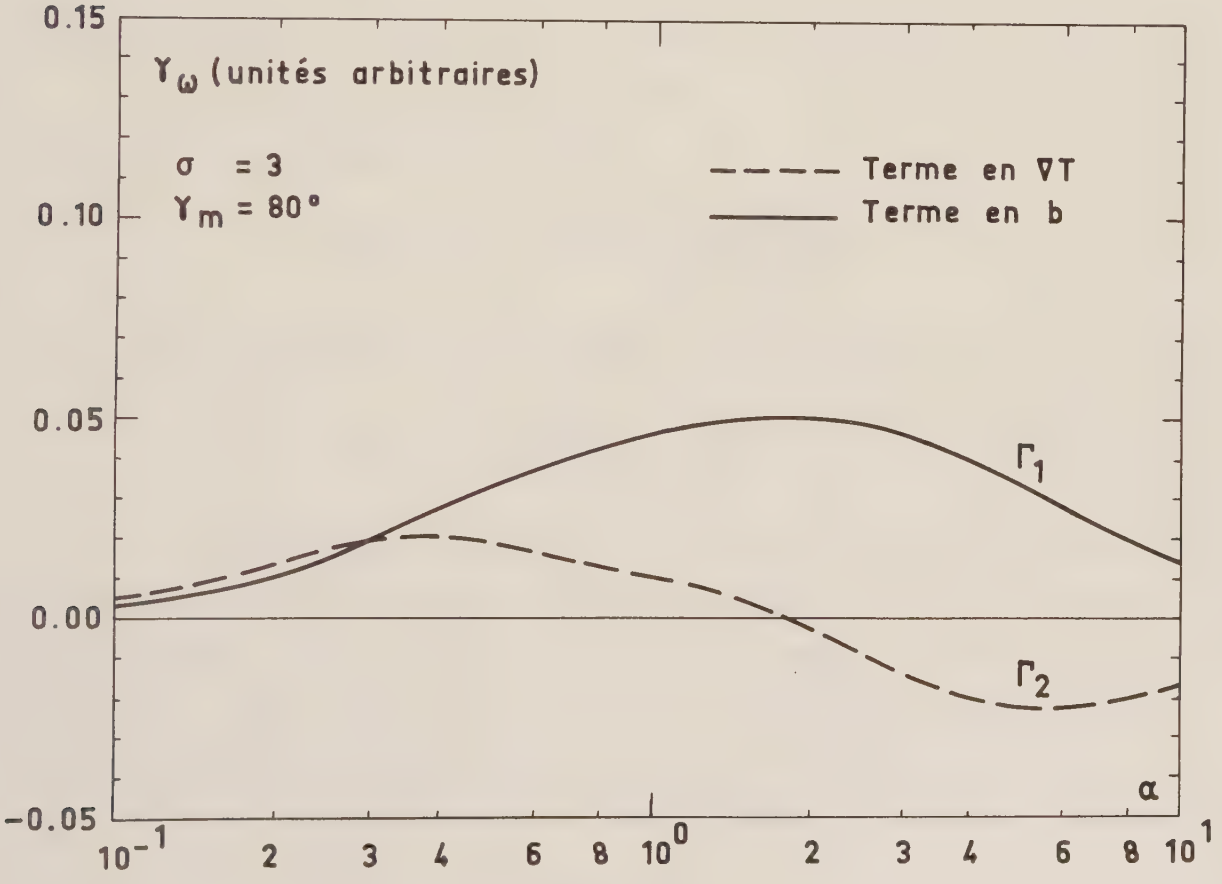


FIG. 12

VARIATION DU TAUX DE CROISSANCE EN FONCTION DE $\alpha = \sqrt{\frac{l\,\omega\,E^{\theta}}{\nu_0\,R/\rho}}$ POUR 2 COUPLES DE VALEURS DE σ ET γ_m

La relation (36) montre en outre que ω est proportionnelle à l elle peut en fait s'écrire

$$\omega = l\,\omega_E \frac{(1+\theta)}{1+b_0\theta} \qquad (59)$$

D'après les équations (58) et (59) il est impossible de construire un mode stationnaire. En effet si on change κ en $-k$ il faut changer $l \sin \gamma_m$ en $-l \sin \gamma_m$ pour conserver $\sigma^2 > 0$. Pour conserver le même point de localisation il faut donc changer l en $-l$ et par suite ω en $-\omega$. On retrouve donc la même vitesse de phase que pour le mode (k,l) et on ne peut donc avoir de mode stationnaire.

Le mode mis en évidence étant convectif il n'est pas évident que ce soit le mode ayant le taux de croissance maximum qui soit le plus dangereux. Il est intéressant d'étudier le taux d'exponentiation des divers modes sur une longueur caractéristique que nous prendrons de l'ordre de la longueur caractéristique de gradient puisque c'est dans la zone des gradients de densité que le mode est susceptible de s'exciter.

Nous commencerons par calculer la vitesse de groupe radiale du mode en différentiant (59), il vient :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = - \frac{l\omega_E a_i \theta(1+\theta)\sqrt{2b_0}}{(1+\theta b_0)^2}$$

Elle est maximum pour $\sqrt{b_0} \sim \sqrt{1/3\theta}$ et est égale à :

$$v_{g_{max}} = \frac{9}{16}\sqrt{\frac{2}{3\theta}}\; l\omega_E\, a_i\, \theta(1+\theta) \qquad (60)$$

Nous avons tracé sur la figure 13A la dispersion de la vitesse de groupe radiale normalisée par rapport à $v_{g_{max}}$ pour trois valeurs de θ en fonction de $ka_i = \sqrt{2b_0}$. La figure 13B donne en plus la dépendance en θ , les trois courbes ayant été normalisées par rapport à la vitesse de groupe maximum pour $\theta = 1$. Les valeurs inférieures à $ka_i \sim 0.15$ sont interdites d'après la condition (32). On a donc toujours

$$b_0 > 10^{-2}$$

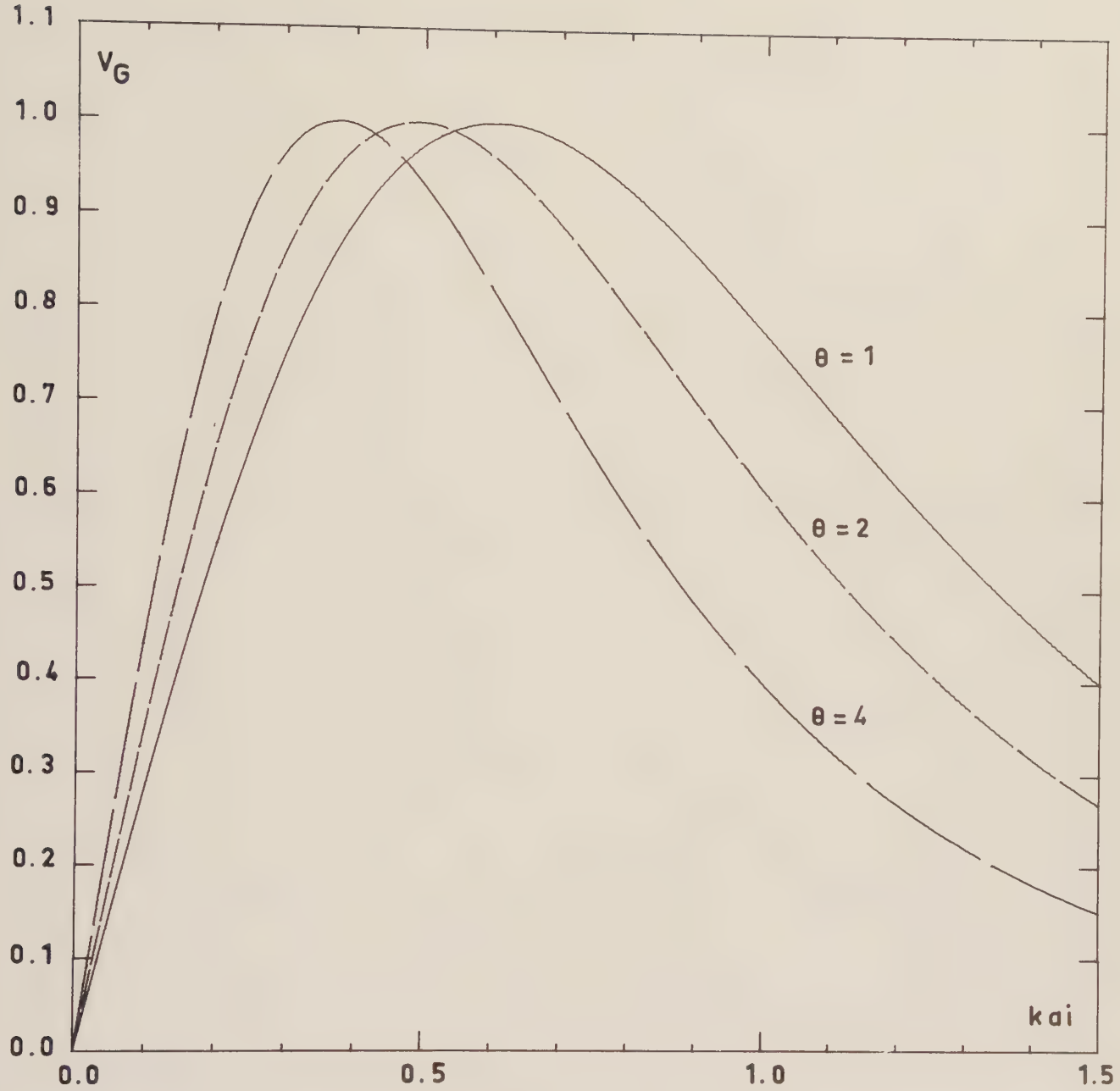


FIG. 13 A

VARIATION RELATIVE DE LA VITESSE DE GROUPE RADIALE EN FONCTION DE kai POUR DIFFERENTES VALEURS DE $\theta = T_e / T_i$

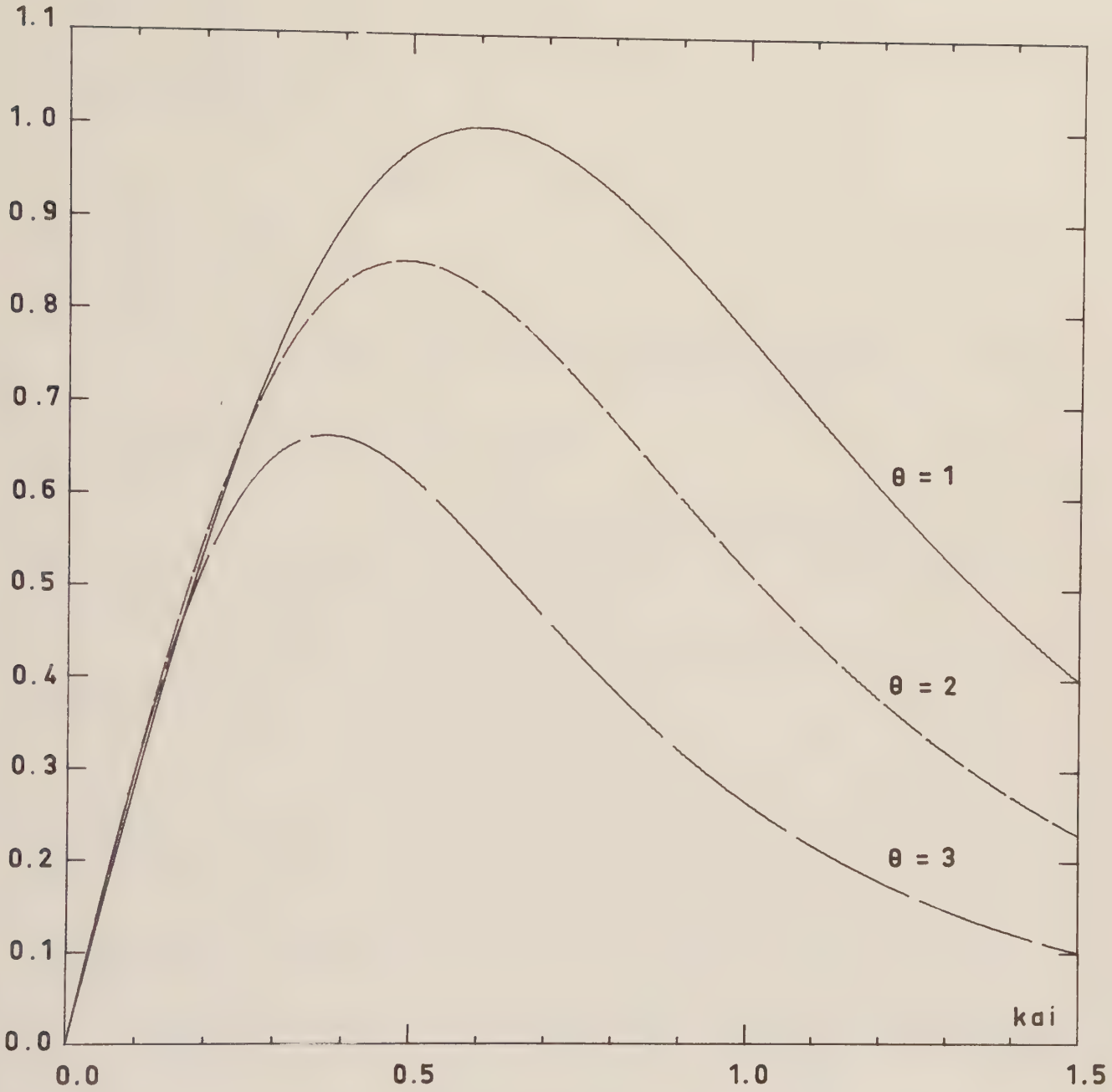


FIG. 13B

VARIATION RELATIVE DE $\frac{v_g}{v_{g\ max.}} \times \frac{1}{\theta(1+\theta)}$ EN FONCTION DE kai

et $\theta = T_e/T_i$

Les résultats précédents ne sont qu'approchés car la dépendance de ω en fonction de b_0 donnée par (59) n'est valable que pour $b_0 \ll 1$. Comme nous nous intéressons à des b_0 pouvant être de l'ordre de 1 il convient de tenir compte des dépendances exactes en $F(b)$. D'après l'Appendice [A 8] la véritable expression de ω est

$$\omega = l\omega_E (1+\theta) \frac{1}{1+\theta(1-F(b))}$$

avec $F(b) = e^{-b} I_0(b)$

et celle de la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = l\omega_E (1+\theta)\theta \frac{F(b)[(1-I_1/I_0]}{[1+\theta(1-F(b))]^2} \sqrt{2b}\, a_i \qquad (61)$$

où I_0 et I_1 sont des fonctions de Bessel.

Par contre, ayant montré que pour $\theta > 1$ le maximum de v_g correspondait à $b_0 = \frac{(ka_i)^2}{2} \sim 10^{-1} \ll 1$ nous pouvons conserver l'expression (60) de $v_{g_{max}}$

Nous calculerons ensuite le taux d'exponentiation que nous définirons comme

$$\gamma_\omega \times t_{trans}$$

où t_{trans} est le temps mis par le mode pour parcourir une longueur caractéristiques φ_0 soit :

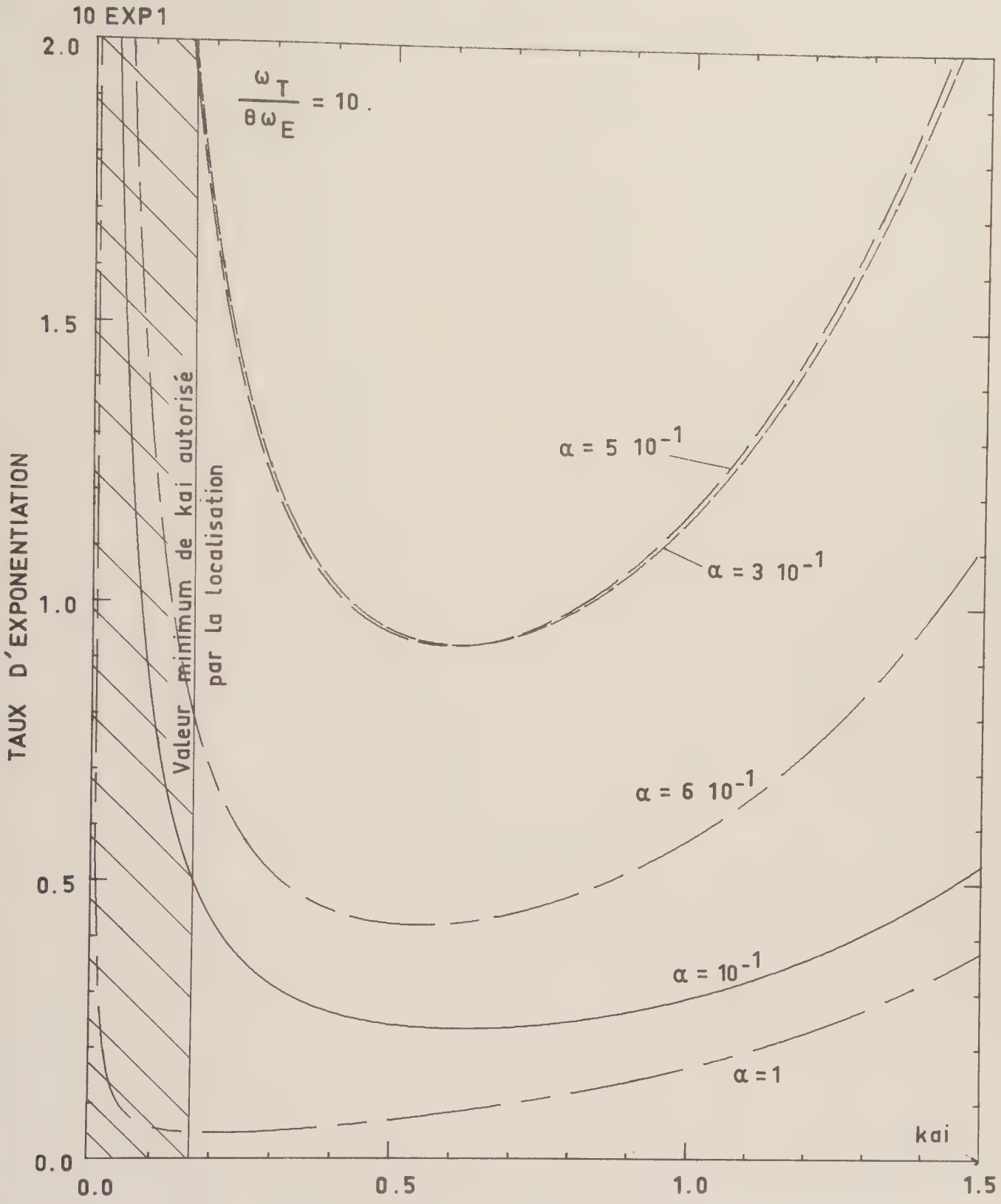
$$t_{trans} = \rho_0 / v_g$$

compte tenu de l'expression γ_ω pour b fini donnée dans /A 8/ il vient

$$\tau_{exp} = \gamma_\omega \times t_{trans} = \sqrt{\frac{\rho}{R}} \left(\frac{\rho_0}{a_i}\right) \times \left\{ \Gamma_1 (1-F(b)) + \frac{\omega_I}{\theta\omega_E} \Gamma_2 (1+\theta(1-F(b)) \right\}$$

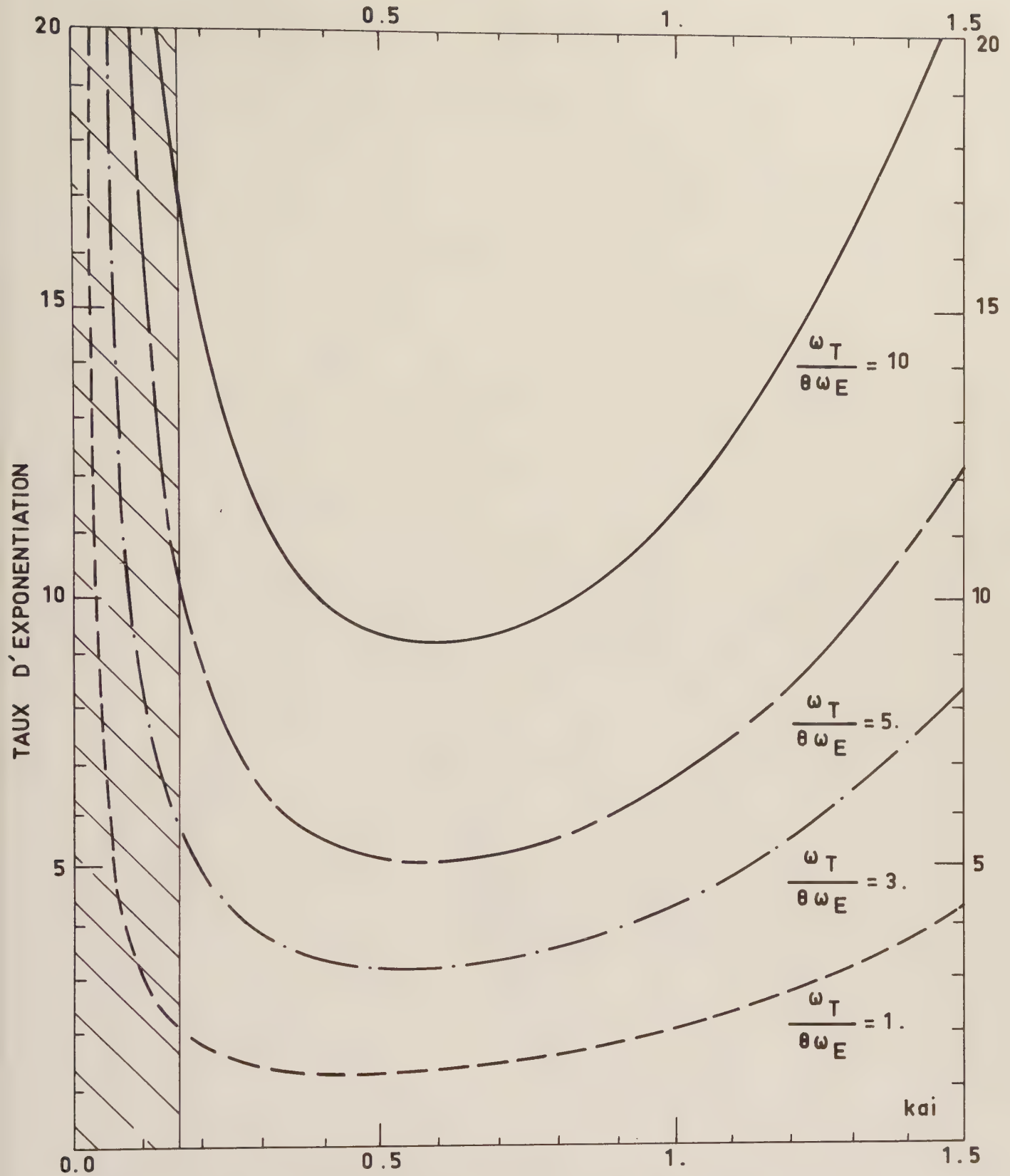
$$\times \left\{ \frac{1}{F(b)(1-I_1/I_0)} \frac{1}{\sqrt{2b_0}} \right\} \qquad (62)$$

L'expression précédente est illustrée par les courbes [14 A, B, C, D]. La figure 14 A donne les variations du taux d'exponentiation en fonction de $ka_i = \sqrt{2b_0}$ pour différentes valeurs de $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{\sqrt{R/\rho}}}$
Sur toutes les figures on a supposé $\sqrt{\frac{\rho}{R}} \left(\frac{\rho_0}{a_i}\right) = 33$ ce qui correspond à $\frac{\rho_0}{a_i} \sim 100$ $\frac{\rho}{R} \sim 1/9$ valeurs tout à fait raisonnables dans le domaine actuel des paramètres.



VARIATION DU TAUX D'EXPONENTIATION EN FONCTION DE kai POUR DIFFERENTES VALEURS DE $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{\nu_0 \, R/\rho}}$

FIG. 14A



VARIATION DE L'EXPONENTIATION MAXIMUM EN FONCTION DE kai POUR DIFFERENTES VALEURS DU RAPPORT $\omega_T/\theta\omega_E$ - LA ZONE HACHUREE EST INTERDITE PAR LA CONDITION DE LOCALISATION

FIG. 14 B

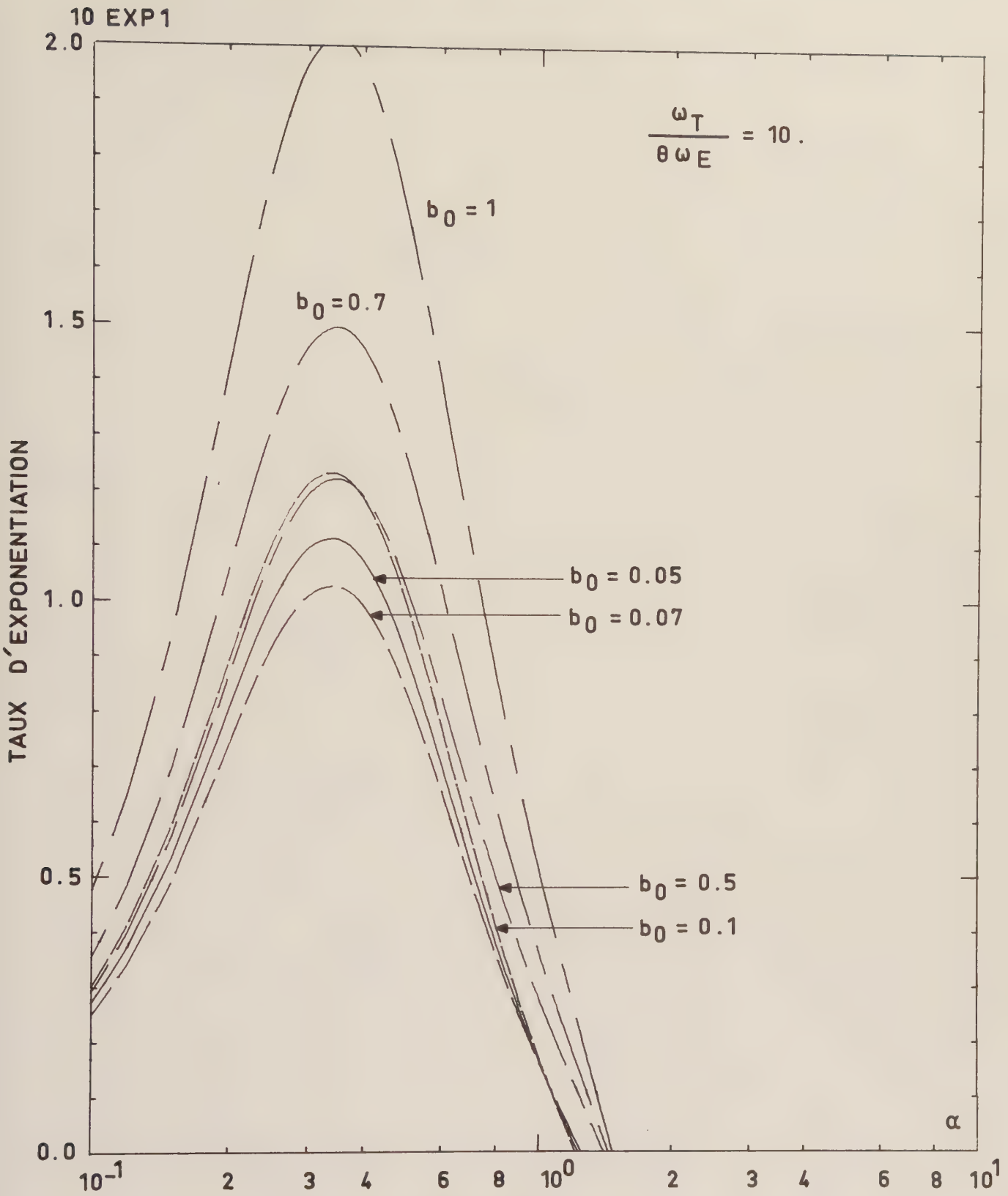


FIG. 14C

VARIATION DU TAUX D'EXPONENTIATION EN FONCTION DE $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{\sqrt{}_0 R/\rho}}$ POUR DIFFERENTES VALEURS DE $b_0 = \frac{k^2 a_i^2}{2}$

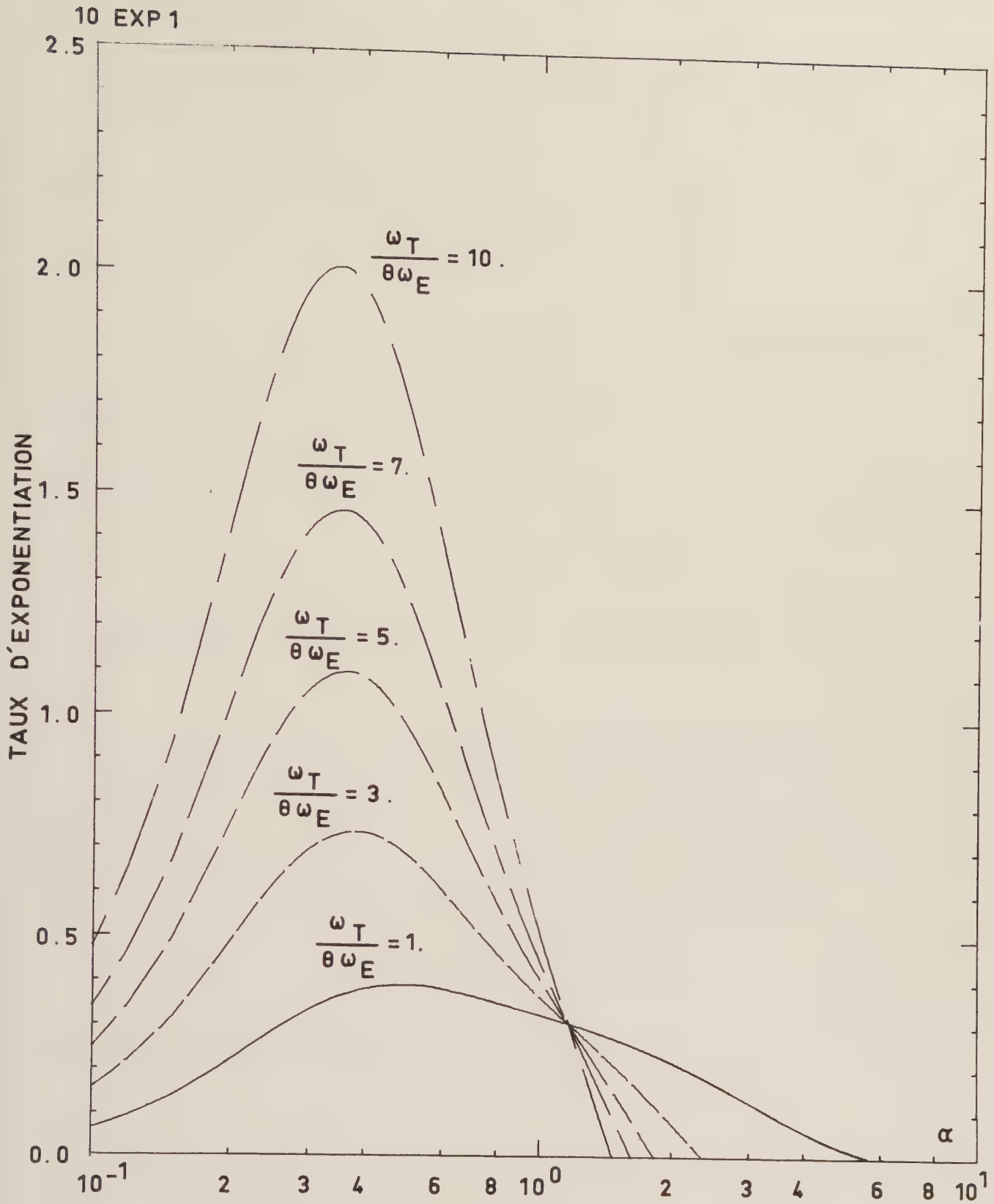


FIG. 14D

VARIATION DU TAUX MAXIMUM D'EXPONENTIATION EN FONCTION DE $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{\nu_0 R/\rho}}$ POUR DIFFERENTES VALEURS DE $\frac{\omega_T}{\theta\omega_E}$

La figure 14 B représente dans les mêmes conditions la dépendance du taux maximum d'exponentiation en fonction de $k a_i$ pour différentes valeurs de $\frac{\omega_T}{\theta \omega_E}$. Il est clair d'après ces 2 courbes que plus $\frac{\omega_T}{\theta \omega_E}$ est grand et plus b_0 est grand plus le mode s'exponentie rapidement. (La zone de $b_0 < 10^{-2}$ étant interdite par la condition (32) d'existence du mode qui impose $k a_i > 1/7$

Les figures (14 C) et (14 D) représentent les variations du taux d'exponentiation en fonction de α pour différentes valeurs de b_0 et de $\omega_T/\theta\omega_E$. Le déplacement au maximum de la courbe (14 D) vers des valeurs inférieures de α quand $\omega_T/\theta\omega_E$ augmente montre clairement l'influence relative des termes Γ_1 et Γ_2 . Lorsque $\omega_T/\theta\omega_E$ est grand le mode est essentiellement une instabilité de gradient de température.

Pour terminer nous évaluerons le niveau linéaire théoriquement atteint par un mode s'exponentiant 10 fois et s'excitant au niveau du bruit.

Nous considérerons un plasma de 10^{13} particules par centimètres cubes et prendrons comme volume caractéristique le volume d'un cube de côté a_i rayon de Larmor des ions. Dans le domaine des paramètres qui nous intéresse, on a $a_i \sim 1\,mm$ et donc environ 10^{10} particules dans le volume caractéristique. Le niveau de bruit est donc

$$\frac{e\Phi}{T_e} \sim (10^{10})^{-1/2} \sim 10^{-5}$$

Soit, après multiplication par $e^{10} = 2\,10^4$

$$\frac{e\Phi}{T_e} \sim 2\,10^{-1}$$

Nous verrons dans le prochain chapitre que nous fixerons un seuil de limitation non linéaire très inférieur à la valeur précédente.

6. MODE RESONNANT

Les résultats précédents reposent sur l'hypothèse $l\bar{\omega}_D \ll \omega - l\omega_E$ Pour des valeurs modérées du rapport d'aspect R/ρ cette hypothèse n'est pas vérifiée. Comme nous l'avons indiqué au moment de la définition de la structure du mode, des effets résonnants concernant les électrons peuvent alors se produire pour les particules de grande énergie et contribuer de façon non négligeable au taux de croissance. Négligeant les collisions dans cette gamme d'énergie on trouve h à partir de (43). Il vient (A7)

$$h = \bar{\Phi} \left\{ P.P. \frac{i}{\omega - l\omega_E - l\bar{\omega}_D} + \pi\delta\,(l\omega_E + l\bar{\omega}_D - \omega) \right\} \qquad (53)$$

A la différence des ions les signes relatifs de $l\bar{\omega}_D$ et $\omega - l\omega_E$ permettent l'existence de résonnances pour $\varepsilon \sim \frac{R}{\rho_0} V_{Te}$ et pour la plupart des valeurs de γ_0 . Ces effets résonnants conduisent à un taux de croissance γ_ω^R qui doit être ajouté à (50). Il vient alors :

$$\gamma_\omega^R = 4\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{k\,max} (\exp -\alpha_0)\alpha_0^{3/2} \left| b_0 l\omega_E \theta(1+\theta) + l\omega_T(\alpha_0 - \frac{3}{2}) \right| \frac{\bar{\Phi}^2(k)K(k)kdk}{\int \Phi^2 d\gamma} \qquad (54)$$

où

$$\alpha_0 = \frac{R}{\rho_0} \left[\left(2\,\frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right) + 4\xi \left(\frac{E}{K} - k'^2 \right) \right]^{-1} \qquad (55)$$

est le rapport de l'énergie résonnante à l'énergie thermique et k_{max} la valeur maximum de k pour laquelle $\alpha_0 > 0$. Dans la plupart des cas α_0 est supérieur à $3/2$ de sorte que le gradient de température est déstabilisant. Nous poserons :

$$\gamma_\omega^R = \sqrt{\frac{R}{\rho_0}} \left[\Gamma_3 b_0 l\omega_E \theta(1+\theta) + \Gamma_4 l\omega_T \right] \qquad (56)$$

Nous avons tracé une courbe typique de Γ_3 et Γ_4 sur la figure (15). Il est visible que si $\xi \sim 1$ et $\frac{\rho_0}{R} > 0.1$ ces effets résonnants conduisent à un taux de croissance non négligeable indépendant des collisions.

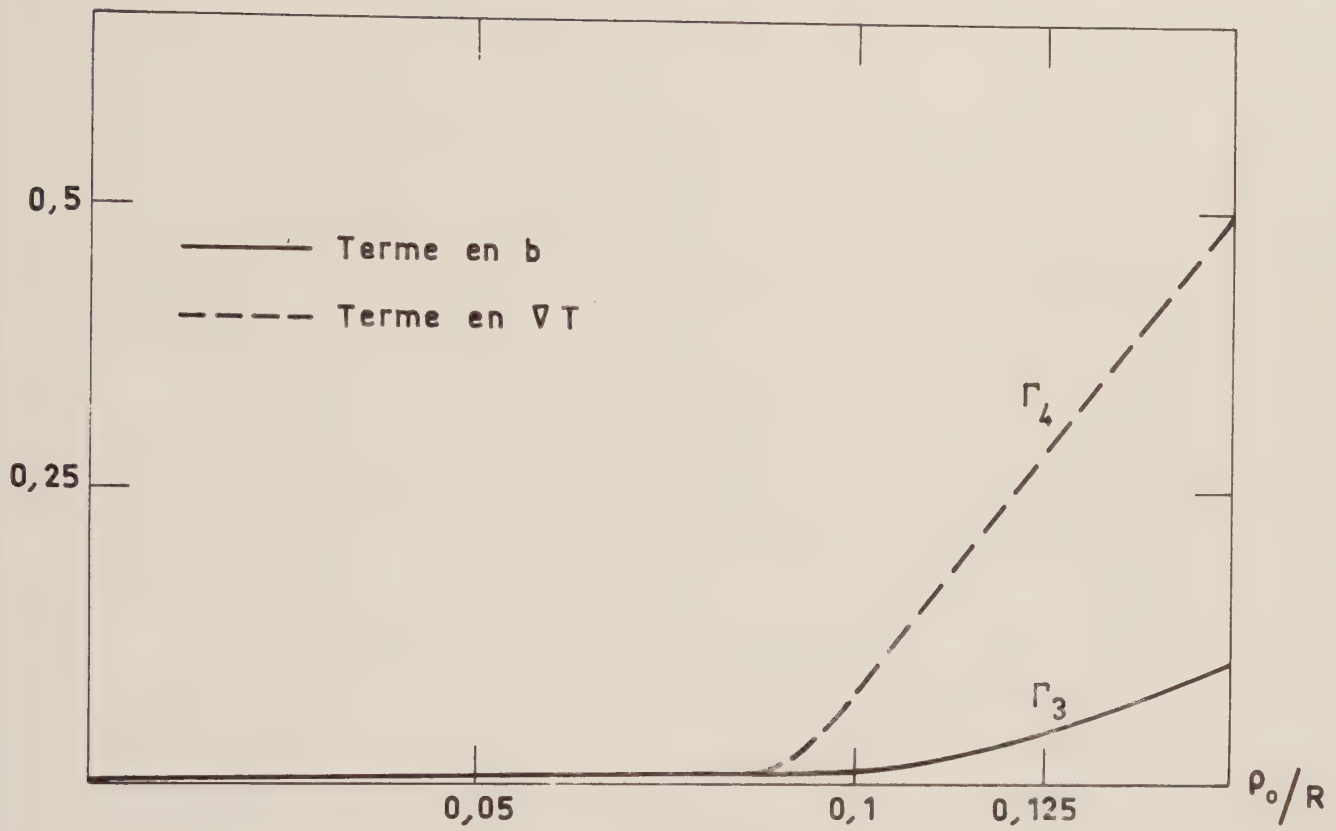


FIG. 15

VARIATION RELATIVE DU TAUX DE CROISSANCE DU MODE RESONNANT EN FONCTION DE ρ_0/R

CHAPITRE V

CONSEQUENCES MACROSCOPIQUES DU MODE D'ELECTRONS PIEGES

1. INTRODUCTION

Dans le présent chapitre nous nous proposons d'évaluer les conséquences de l'instabilité mise en évidence dans le chapitre précédent sous forme de coefficients de diffusion de particules ou d'énergie thermique. Ces coefficients sont insuffisants pour évaluer à priori le temps de vie des particules ou de l'énergie, mais on peut les comparer aux formules néo-classiques ou pseudo-classiques ou les utiliser dans les simulations numériques des décharges de type Tokomak en tenant compte des dépendances radiales qui jouent un rôle important.

Même en se limitant à la détermination des coefficients de diffusion, le calcul est difficile. Les théories de la diffusion turbulente sont en effet beaucoup moins avancées que celles de la diffusion au voisinage de l'équilibre thermodynamique même dans des géométries simples.

En réalité le problème peut être scindé en deux : le premier consiste à relier un spectre de turbulence donné, à la diffusion qui en résulte. Lorsque la turbulence est faible, c'est à dire lorsque le taux de croissance est faible devant la fréquence, et que le spectre est suffisamment large pour qu'il n'y ait pas de piégeage des particules dans une onde quasiment monochromatique ce problème admet une solution presque exacte dans le cadre de la théorie quasilinéaire. Le deuxième problème est la limitation non linéaire de l'amplitude du mode et à ce jour aucune méthode ne donne de réponse satisfaisante car il faudrait résoudre entièrement le problème non linéaire, ce qui est actuellement impossible. On en est donc réduit à une évaluation des ordres de grandeurs des amplitudes du mode. Nous commencerons par établir les relations liant les flux de diffusion à l'amplitude des modes. Dans un autre paragraphe nous étudierons les mécanismes de limitation non linéaire et nous évaluerons une borne supérieure des coefficients de diffusion correspondant.

2. EXPRESSIONS DES FLUX DE DIFFUSION

Nous nous intéressons aux particules qui diffusent radialement puisque ce sont elles qui quittent la configuration, les quantités que nous devons calculer sont donc :

pour le flux de particules :

$$\Gamma = \left[\frac{d}{d\psi}\oint \frac{dl}{B}\int (\vec{v}.\vec{\nabla\psi})\,F\; d^3v\right] \times \left[\oint \frac{dl}{B}\right]^{-1} \qquad (67)$$

pour le flux d'énergie :

$$Q = \left[\frac{d}{d\psi}\oint \frac{dl}{B}\int (\vec{v}.\vec{\nabla\psi})\,\frac{1}{2}\,m v^2\,F\; d^3v\right] \times \left[\oint \frac{dl}{B}\right]^{-1} \qquad (68)$$

Dans les deux expressions précédentes F correspond à la fonction de distribution d'équilibre modifiée par la présence d'un terme de fluctuations. Le terme $(\vec{v}.\vec{\nabla\psi})$ définit une vitesse radiale v_ψ tandis que l'intégrale $\oint \frac{dl}{B}$ est à prendre sur une surface magnétique $\psi = c^{te}$

Rappelons qu'en théorie quasilinéaire on sépare la fonction de distribution en 2 parties en posant

$$F = F_0 + \tilde{F}$$

$$F_0 = \left(\oint \frac{dl}{B}\right)^{-1} \oint \frac{dl}{B}\; F$$

F_0 est la moyenne de F prise sur la surface magnétique définie par ψ c^{te} ; tandis que la différence $F - F_0 = \tilde{F}$ correspond à la fraction oscillante de la fonction de distribution. On montre alors que la fonction de distribution F_0 obéit à l'équation

$$\frac{dF_0}{dF} + v.\nabla F_0 + \frac{q}{m}\vec{E}\;\frac{dF_0}{d\vec{v}} - \Omega_c\,\frac{dF}{d\theta} = \frac{e}{m}\left\langle \vec{\tilde{E}}\;\frac{d\tilde{F}}{d\vec{v}}\right\rangle \qquad (69)$$

Le traitement de cette équation est tout à fait analogue à celui de l'équation qui traduit le problème collisionnel. Il est d'ailleurs possible de superposer les deux problèmes dans la mesure où les couplages entre les collisions et les fluctuations électrostatiques restent négligeables, il suffit alors de superposer les solutions particulières correspondant à chacun des seconds membres.

En résolvant (69) ordre par ordre en $\frac{a_i}{\rho}$ comme pour l'équilibre on obtient la première correction due au terme fluctuant, soit :

$$\Omega_c \frac{dF_1}{d\theta} = \frac{e}{m} < \tilde{E} \frac{d\tilde{F}}{d\vec{v}} >$$

Nous nous proposons donc de calculer les flux induits par F_1

En intégrant par parties les expressions (67) et (68) on y fait apparaître directement la quantité $\frac{dF_1}{d\theta}$ soit puisque d'après /A1/

$$(v . \nabla\psi) = v_\perp \cos\theta \, |\nabla\psi|$$

$$\Gamma_{fluct} \sim \oint \frac{dl}{B} |\nabla\psi| \int \frac{e v_\perp \sin\theta}{m\Omega_c} < \tilde{\vec{E}} \frac{d\tilde{f}}{d\vec{v}} > d^3v \quad (70)$$

$$Q_{fluct} \sim \oint \frac{dl}{B} |\nabla\psi| \int \frac{e v_\perp \sin\theta}{\Omega_c} \varepsilon < \tilde{\vec{E}} \frac{d\tilde{f}}{d\vec{v}} > d^3v \quad (71)$$

(Le signe $\sim$ est pris ici au sens de proportionnel).

L'évaluation de l'intégrale sur les vitesses étant purement locale elle ne fait pas intervenir la structure spatiale du mode ce qui évite l'emploi du système de coordonnées $(\varepsilon, \mu, \theta)$. Il est alors possible de définir un référentiel cartésien local dans l'espace des vitesses par

$$d^3v = dv_{//} \, dv_1 \, dv_2$$

$$\frac{d}{d\vec{v}} = \vec{n} \frac{d}{d\vec{v}_{//}} + \vec{e}_1 \frac{d}{dv_1} + \vec{e}_2 \frac{d}{dv_2}$$

Les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ont la même signification que dans /A1/

Après intégration par parties sur d^3v il reste

$$\Gamma_{fluct} \sim \oint \frac{dl}{B} |\nabla\psi| < \int (\tilde{\vec{E}} . \vec{e}_2) \, \tilde{f}^3 \, dv > \quad (72)$$

$$Q_{fluct} \sim \oint \frac{dl}{B} |\nabla\psi| < \int \left[(\vec{E} . \vec{v}) v_2 + (\vec{E} . \vec{e}_2) \frac{v^2}{2} \right] \tilde{f} \, d^3v > \quad (73)$$

Dans les expressions précédentes on a admis que les moyennes sur les surfaces magnétiques commutaient avec les intégrales sur les vitesses. Le champ électrique fluctuant ne dépendant pas des vitesses il est clair que l'expression du flux de diffusion des particules ne dépend que du champ électrique fluctuant et de la densité fluctuante $\delta n_e = \int \tilde{f} \, d^3v$ soit

$$\Gamma_{fluct} \sim \oint \frac{dl}{B} |\nabla\psi| < \tilde{E}_{\vec{e}_2} \, \delta\tilde{n} > \quad (74)$$

Le problème du flux thermique est un peu plus compliqué. Son expression comporte deux termes. L'un est directement lié aux fluctuations des particules, il s'agit du terme en $v^2 \tilde{f}\ d^3v$ qui traduit les fluctuations d'énergie cinétique associées aux fluctuations de densité. Le deuxième terme correspond aux fluctuations du moment magnétique. En effet en développant le produit scalaire $(\vec{E}.\vec{v})$ et en remplaçant v_2 par sa valeur il vient $(\vec{E}.\vec{v})\ v_2 =$

$$(\vec{E}.\vec{n})\ v_{//}\ v_\perp \sin\theta + (\vec{E}.\vec{e_1})\ v_\perp^2 \sin\theta\cos\theta + (\vec{E}.\vec{e_2})\ v_\perp^2 \sin^2\theta$$

Il est clair qu'après intégration sur l'angle θ seul le dernier terme donnera une contribution non nulle proportionnelle à μB

En regroupant les termes, on obtient finalement

$$Q_{fluct} \sim \int \frac{dl}{B}\ |\nabla\psi| < \int (\varepsilon + \mu B)\ |\tilde{E}_{\vec{e_2}}|\ \tilde{f}\ d^3v > \qquad (75)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que

$$\vec{\tilde{E}} = -\ \nabla\tilde{\Phi}_1 = -i\ \tilde{\Phi}_1\ \nabla S + \frac{1}{\rho}\ \frac{d\tilde{\Phi}_1}{d\gamma}$$

$$\vec{e_2} = -\ \frac{B\varphi}{B}\ \vec{e}_\gamma - \frac{B\gamma}{B}\ \vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{E}_{\vec{e_2}}| = -\ i \left(\frac{B\varphi}{B}\ \frac{q}{r} + \frac{B\gamma}{B}\ \frac{1}{R}\right) l\tilde{\Phi}_1 + \frac{B\varphi}{B}\ \frac{1}{r}\ \frac{d\tilde{\Phi}_1}{d\gamma}$$

et que

$$\tilde{f} = \frac{e\tilde{\Phi}_1}{Te} + \frac{ie}{Te}\ h\left[\omega - l\omega_E\ (1+\theta) - l\omega_T \left(\frac{m\varepsilon}{T} - \frac{3}{2}\right)\right] \exp(iS - \omega t)$$

h étant solution de (51)

Dans l'évaluation des produits $< |\vec{E}_2|\ \tilde{f} >$ les termes imaginaires s'en vont par sommation sur l et nous négligerons en outre les termes en $\frac{d\Phi_1^2}{d\gamma}$ qui sont lq fois plus petits que les termes en Φ_1^2 avec $l >> 1$ et $q > 1$

Avant de donner les expressions définitives des flux, soulignons que c'est finalement la composante azimutale du champ électrique qui provoque la diffusion radiale

En regroupant les termes on obtient

Pour le flux de densité :

$$\left\langle \int \tilde{E}_2 \tilde{f}\, d^3v \right\rangle =$$

$$\frac{e}{T_e} \int \frac{B\, d\varepsilon\, d\mu\, d\theta}{|v_{//}|} \left[\omega - l\omega_E (1+\theta) + l\omega_T \left(\frac{m\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] h\, \phi^* F_0 \quad (76)$$

Pour le flux thermique :

$$\left\langle \int \tilde{E}_2 (\varepsilon + \mu B) \tilde{f}\, d^3v \right\rangle \sim \left\langle \int \tilde{E}_2 (2\varepsilon) \tilde{f}\, d^3v \right\rangle =$$

$$= 2 \frac{e}{T_e} \int \frac{B\, d\varepsilon\, d\mu\, d\theta}{|v_{//}|}\, \varepsilon \left[\omega - l\omega_E (1+\theta) + l\omega_T \left(\frac{m\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] h\, \phi^* F_0 \quad (77)$$

L'approximation $\varepsilon \sim \mu B$ est justifiée par le fait qu'on s'intéresse aux particules piégées. La première de ces expressions est semblable à celle qui définit le taux de croissance linéaire de l'instabilité γ_ω donné par l'expression (55). Après intégration sur les surfaces magnétiques on obtient donc pour $b_0 << 1$

$$\Gamma_{fluct} = \frac{n_0}{T_e B} \frac{l\omega_E \theta}{(\omega - l\omega_E)^2}\, \gamma_\omega \int |\phi_1^2|\, d\gamma \quad (78)$$

$$\gamma_\omega = \sqrt{\frac{\rho}{R}} \left[l\omega_E \theta\, (1+\theta)\, b_0\, \Gamma_1 + l\omega_T\, \Gamma_2 \right] \quad (79)$$

La définition des quantités Γ_1 et Γ_2 est la même que dans le chapitre précédent (56) et (57).

On peut de façon analogue définir des quantités sans dimensions Q_1 et Q_2 ne se distinguant des quantités Γ_1 et Γ_2 que par une multiplication par ε et écrire toujours pour $b_0 << 1$

$$Q_{fluct} = \frac{l}{\rho} \frac{n_0}{T_e B} \frac{l\omega_E \theta}{(\omega - l\omega_E)^2}\, q_\omega \int |\phi_1^2|\, d\gamma \quad (80)$$

$$q_\omega = 2 \sqrt{\frac{\rho}{R}} \left[Q_1\, b_0\, l\omega_E (\theta)(1+\theta) + Q_2\, l\omega_T \right] \quad (81)$$

avec

$$Q_1 = \frac{1}{n_0} \frac{l\omega_E \theta}{\int |\phi_1^2|\, d\gamma}\, \mathcal{R}_e \int h\phi^* \frac{m\varepsilon}{T} F_0 \frac{B\, d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|}\, d\gamma \quad (82)$$

$$Q_2 = \frac{1}{n_0} \frac{l\omega_E \theta}{\int |\phi_1^2|\, d\gamma}\, \mathcal{R}_e \int h\phi^* \frac{m\varepsilon}{T} \left(\frac{m\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) F_0 \frac{B\, d\mu\, d\varepsilon\, d\gamma}{|v_{//}|} \quad (83)$$

Les quantités sous le signe somme étant proportionnelles au carré du module de Φ , Γ_1, Γ_2, Q_1, Q_2 ne dépendent pas de la normalisation des amplitudes du mode et on trouve le résultat évident a priori que les flux de diffusion de particules et d'énergie sont proportionnels à l'énergie du mode.

Nous avons représenté sur les figures 16 et 17 les dépendances de Γ_1, Γ_2, Q_1, Q_2 dans les cas étudiés au moment du calcul des taux de croissance. En abscisse figure le paramètre $\alpha = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_E}{\sqrt{R/\rho}}}$

Ces figures appellent plusieurs commentaires. Tout d'abord à énergie fluctuante donnée les flux thermiques sont beaucoup plus importants que les flux de particules. Cette augmentation est encore plus sensible que ne semble le montrer la figure par suite du facteur 2 qui intervient dans la définition de

Elle est due à la modification de la pondération en énergie des expressions intervenant dans les intégrales (82) et (83) définissant Q_1 et Q_2 par rapport à Γ_1 et Γ_2. Physiquement, cela signifie que la diffusion d'un petit nombre de particules de grande énergie affecte peu le coefficient de diffusion des particules mais peut correspondre à une perte non négligeable d'énergie.

Les différences observées entre les courbes correspondant à $\sigma = 2$ $\gamma_m = 60°$ et $\sigma = 3$ $\gamma_m = 80°$ sont dues comme pour le taux de croissance à la modification du nombre et de l'énergie des particules affectées par le mode.

La modification de la pondération en énergie à une dernière conséquence importante. Il y a déplacement des maxima des courbes Q_1 et Q_2 vers des valeurs de α plus petites, c'est-à-dire à l donné vers des fréquences de collisions plus grandes que pour les coefficients Γ_1 et Γ_2 de diffusion des particules. Ce point est important car lorsque les électrons sont au bord du régime "des bananes" immédiatement au voisinage du régime du plateau de diffusion il peut être difficile de construire un mode avec $\alpha \sim 1$ tandis qu'il reste facile de construire un mode avec

$\alpha \sim 0.3$ qui correspond à des nombres d'onde l/ρ sensiblement 10 fois plus petits.

Compte tenu du facteur 2 déjà signalé l'examen des courbes montre que le flux thermique est susceptible d'être 10 fois plus important que le flux de densité surtout si on suppose b_0 petit.

3. ETUDE DE LA LIMITATION NON LINEAIRE

Ayant relié la diffusion des particules et de la chaleur au carré de l'amplitude du champ turbulent nous nous proposons de déterminer l'amplitude du mode après saturation par des mécanismes non linéaires. Comme il est impossible de traiter le problème complet il est obligatoire de se limiter à une analyse des mécanismes non linéaires et de choisir celui qui conduit à l'amplitude de saturation la plus faible. Il importe de souligner qu'une telle procédure ne peut conduire qu'à des ordres de grandeur et limite la valeur des coefficients obtenus à des dépendances fonctionnelles.

Dans le problème qui nous intéresse on peut imaginer plusieurs mécanismes de limitation.

On peut tout d'abord considérer le dépiégeage des particules par le champ électrostatique de l'onde. L'ordre de grandeur du potentiel correspondant est facile à atteindre. En effet l'énergie moyenne d'un électron piégé étant de l'ordre de $\frac{\rho}{R} V_{Te}^2$ il est clair que si l'énergie de l'onde atteint cette valeur l'essentiel de la population des particules considérées sera dépiégé. Le premier mécanisme conduit donc à

$$\frac{e\Phi}{T_e} < \frac{\rho}{R} \qquad (84)$$

Un calcul plus rigoureux à partir des invariants adiabatiques a été fait par C. Jablon et al. [30] [44] il conduit sensiblement au même ordre de grandeur.

Un autre mécanisme pourrait être la délocalisation du mode par le champ turbulent. La localisation du mode repose en effet entièrement sur la modulation de la vitesse de dérive magnétique due à la courbure.

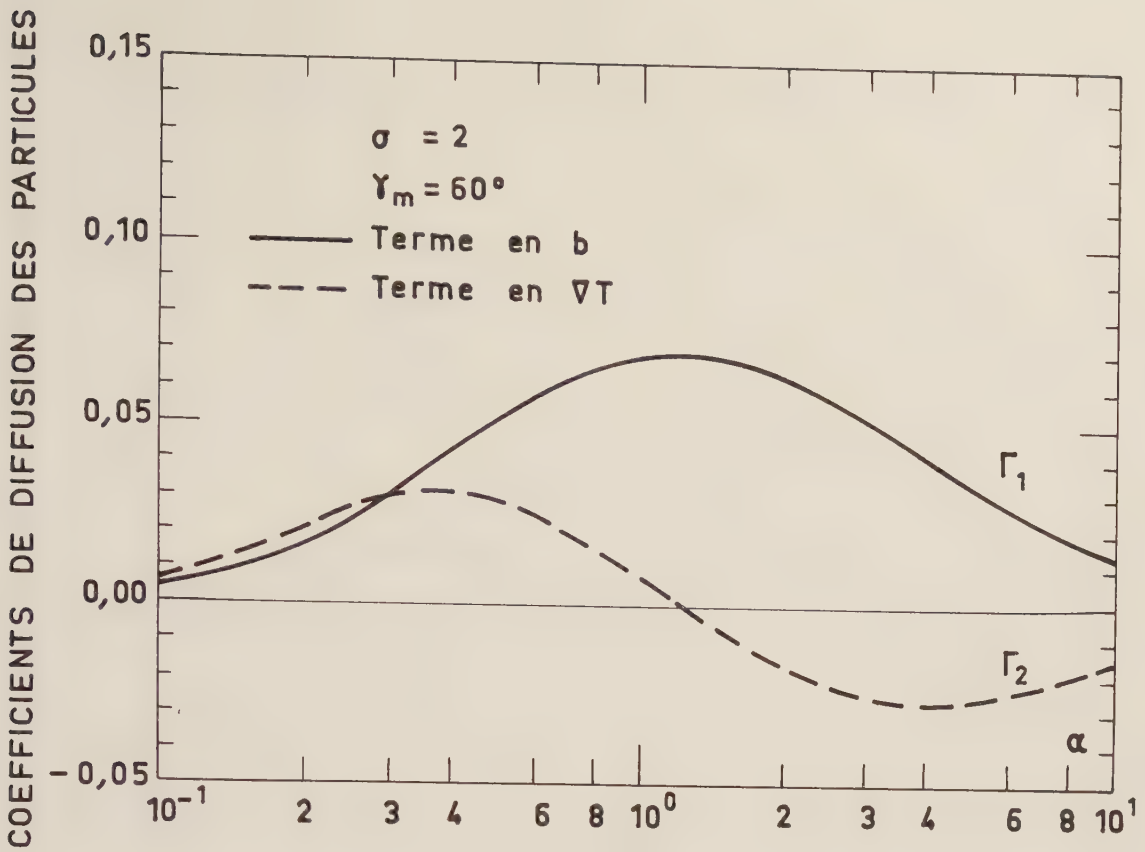


FIG. 16A

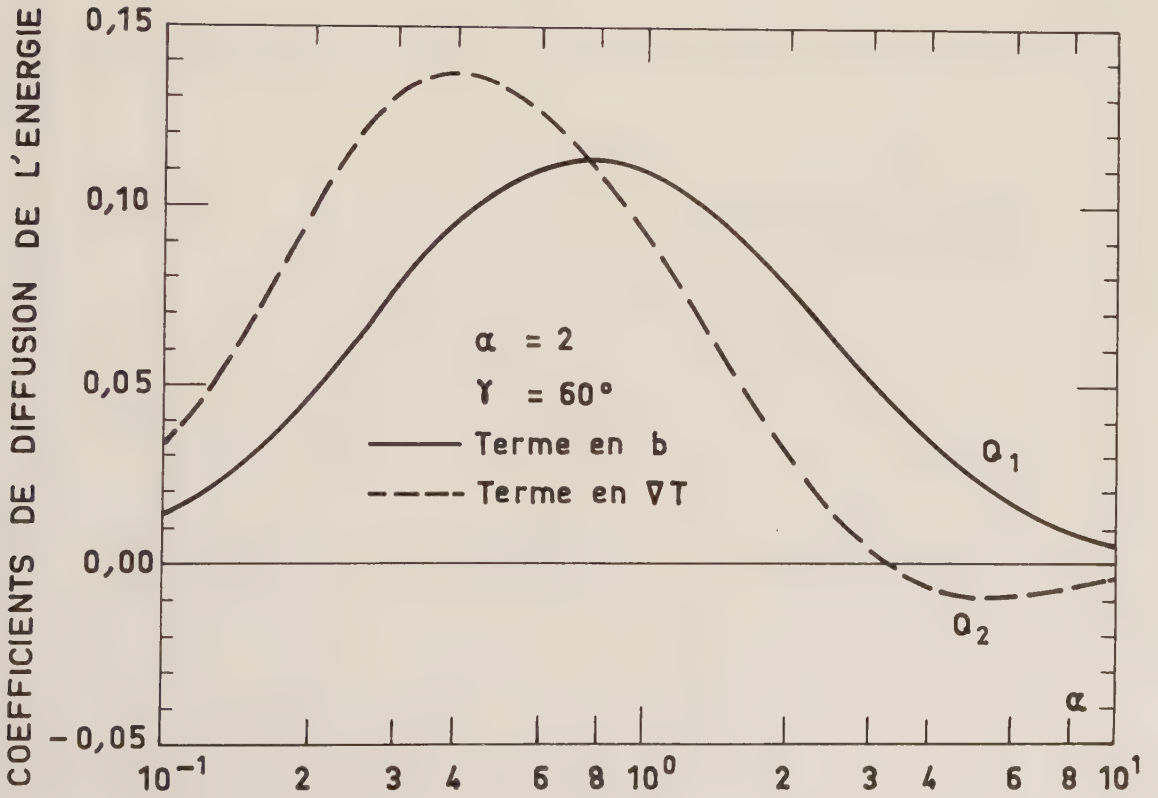


FIG. 16B

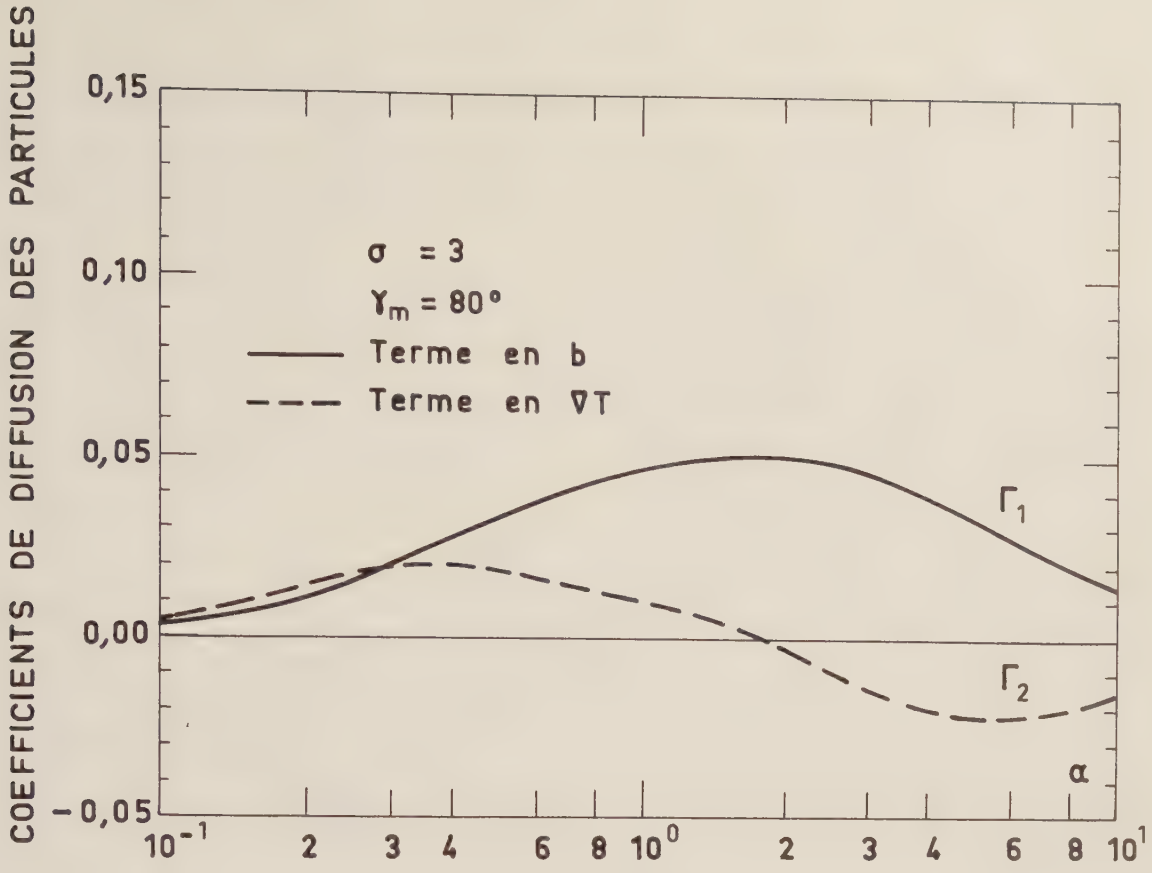


FIG. 17A

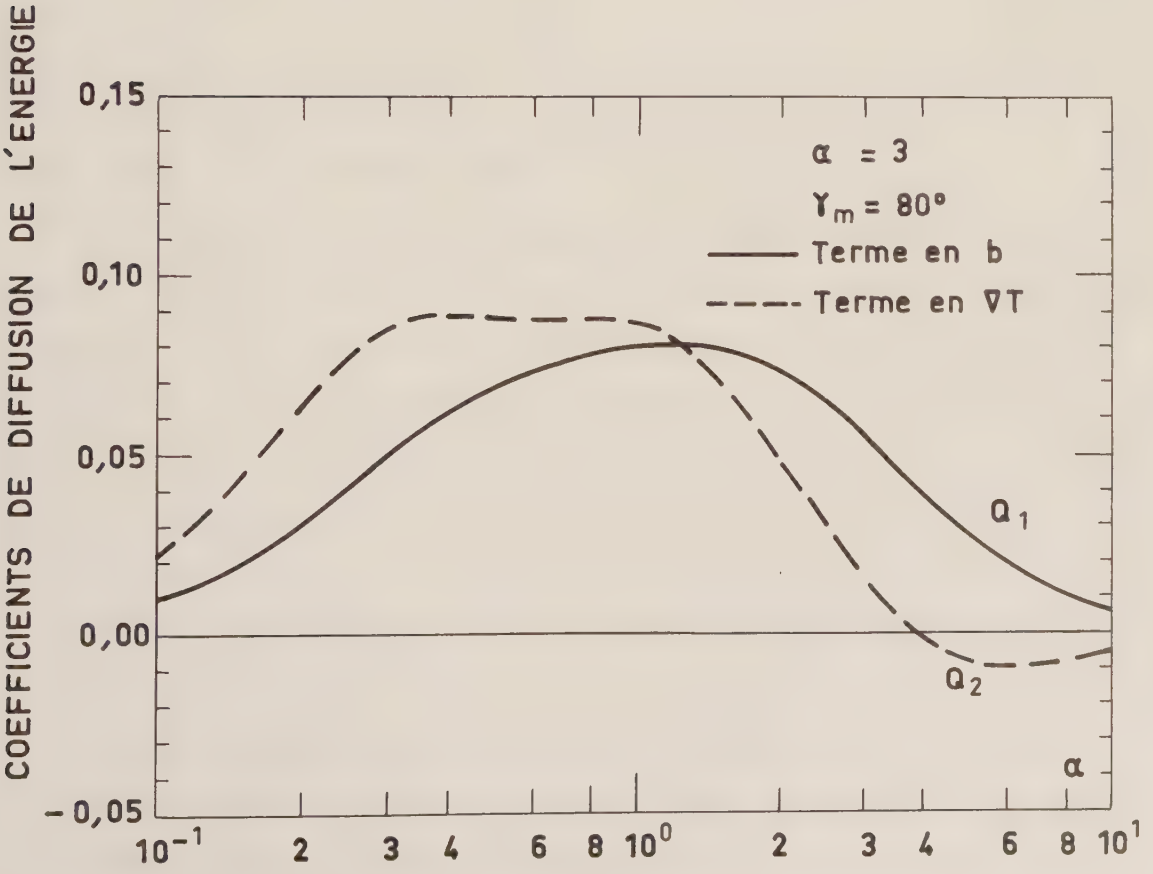


FIG. 17B

On peut donc être tenté d'écrire que le mode sera délocalisé si la vitesse de dérive électrique $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ dans le champ de l'onde devient comparable à la vitesse de dérive magnétique.

Nous avons considéré des modes tels que $\frac{k\rho}{l} >> 1$ où $k = k_\psi |\nabla\psi|$ est le nombre d'onde radial, $\frac{l}{\rho}$ le nombre d'onde azimutal. Dans ces conditions le champ électrique turbulent est essentiellement radial. La composante dominante de la vitesse de dérive est donc azimutale et vaut

$$v_{DE} \sim - \frac{k\Phi_k}{B}$$

comme

$$v_{DM} \sim \frac{a_e V_{Te}}{R}$$

On a donc l'inégalité

$$\frac{k\Phi_k}{B} < \frac{a_e V_{Te}}{R}$$

Soit

$$\frac{e\Phi}{T_e} < \frac{1}{kR} \qquad (85)$$

La comparaison de (84) et (85) montre que cette dernière condition est plus sévère dès que $k\rho > 1$. Cette inégalité est toujours largement satisfaite puisque nous étudions des modes à longueurs d'onde transversales courtes devant les dimensions radiales du plasma.

Néanmoins un calcul approché en géométrie droite fait en "injectant" une onde test dans le spectre de turbulence [45] [46] semble montrer qu'il n'y a pas délocalisation. Ce calcul est présenté dans l'appendice /A 9/. Ce résultat est en accord avec la théorie classique des couplages de mode /51/ qui montre que la réponse du plasma est proportionnelle aux termes en b. Les effets délocalisants ne pourraient dont être précisés qu'en poussant le calcul à un ordre plus élevé ce qui sort du cadre de cette étude. Nous réserverons donc notre réponse en ce qui concerne ce mécanisme de limitation.

Il reste un troisième et dernier mécanisme qui est invoqué pour les instabilités de dérive classique / 28 /. Il s'agit de la limitation de l'excursion radiale maximum d'une particule à une longueur inférieure à la longueur d'onde radiale du mode.

La vitesse radiale d'une particule dans le champ turbulent est :

$$v_R = \left(\frac{E \times B}{B^2}\right)_{Ex} \simeq -i \frac{lq\Phi_K}{\rho B}$$

La condition que nous venons de définir s'écrit alors

$$\frac{lq\Phi_K}{\rho B} \times \frac{2\pi}{\omega} < \frac{1}{k}$$

En remplaçant ω par $l\omega_E$ en prenant pour simplifier puisqu'il ne s'agit que d'ordre de grandeur $q/\theta \sim 1$ il vient :

$$\frac{e\Phi}{T_e} < \frac{1}{k\rho_0} \qquad (86)$$

Il faut comparer cette condition à la condition (84). L'étude linéaire du mode a montré qu'on pouvait admettre que les modes les plus dangereux du point de vue des instabilités étaient les modes à $b \sim 1$ car ce sont ceux qui s'exponentiaient le plus. On a donc $ka_i \sim 1$ ce qui ramène la comparaison de (84) et (86) à l'inégalité

$$\frac{a_i}{\rho_0} < \frac{\rho}{R}$$

Cette condition étant toujours largement vérifiée, nous adopterons comme mécanisme de limitation le troisième mécanisme et nous prendrons

$$\frac{e\Phi_{max}}{T_e} = \frac{1}{k\rho_0}$$

4. CALCUL DES COEFFICIENTS DE DIFFUSION

On tire les coefficients de diffusion des particules de (78) et (80). Pour les particules, il vient :

$$D = \Gamma_{fluct} \left(\frac{dn_0}{d\rho}\right)^{-1}$$

$$= \frac{T_e}{eB} \left(\frac{1}{k\rho}\right)^2 \times \sqrt{\frac{\rho}{R}} \left\{ \Gamma_1 (1+\theta) + \Gamma_2 \frac{\omega_T}{\theta\omega_E} \frac{1}{b_0} \right\} b_0 \qquad (87)$$

et pour l'énergie

$$x_e = Q_{fluct} \left(\frac{dTe}{d\rho}\right)^{-1}$$

$$= \frac{2Te}{eB}\left(\frac{1}{k\rho}\right)^2 \times \sqrt{\frac{\rho}{R}} \left\{ Q_1(1+\theta) + Q_2 \frac{\omega_T}{\theta\omega_E} \frac{1}{b_0} \right\} b_0 \quad (88)$$

Les expressions de x_e et D sont donc semblables à condition de remplacer Γ_i par Q_i . Nous nous limiterons donc pour le moment à l'étude de D . En remplaçant b_0 par $\frac{k^2 a_i^2}{2}$ il vient

$$D \sim \frac{Te}{eB}\left(\frac{a_i}{\rho}\right)^2 \times \sqrt{\frac{\rho}{R}} \; lq \left[\Gamma_1(1+\theta) + \frac{1}{b_0}\frac{\omega_T}{\theta\omega_E}\right]$$

Γ_1 et Γ_2 sont fonctions de l par l'intermédiaire de α . Soit α_{max} la valeur de α correspondant au mode d'exponentiation maximum, on a

$$\alpha_{max}^2 \simeq \frac{l\omega_E\theta}{(1+\theta b_0)\sqrt{\frac{R}{\rho}}}$$

soit en remplaçant dans D après développement de ω_E et simplification

$$D_{max} \sim \alpha_{max}^2 \nu_0 \left(\frac{R}{\rho}\right)^{1/2} a_i^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left[\Gamma_1(1+\theta) + \Gamma_2\left(\frac{1}{b_0}\right)\right] \quad (89)$$

Soit encore en faisant apparaître le rayon de Larmor des électrons

$$D_{max} \sim \nu_0 a_e^2 \times \alpha_{max}^2 \times \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \left[\Gamma_1(1+\theta) + \Gamma_2\left(\frac{1}{b_0}\right)\right] \quad (90)$$

Comme nous l'avons déjà indiqué l'expression du coefficient de conductibilité thermique est obtenue en remplaçant Γ_i par $2\,Q_i$. En réalité les expressions entre crochets que nous venons d'utiliser ne sont valables que pour b_0 petit. Pour b_0 de l'ordre de l'unité il faut utiliser les expressions exactes de l'appendice/ A 8/ On peut alors déterminer la valeur de α_{max} et la valeur maximum du crochet.

La figure (18) montre que les valeurs de α conduisant au maximum de diffusion sont définies par

$$0.3 < \alpha < 0.5$$

ce qui correspond aussi au maximum d'exponentiation, la valeur maximum du crochet étant supérieure à l'unité pour les flux de particules et à 10

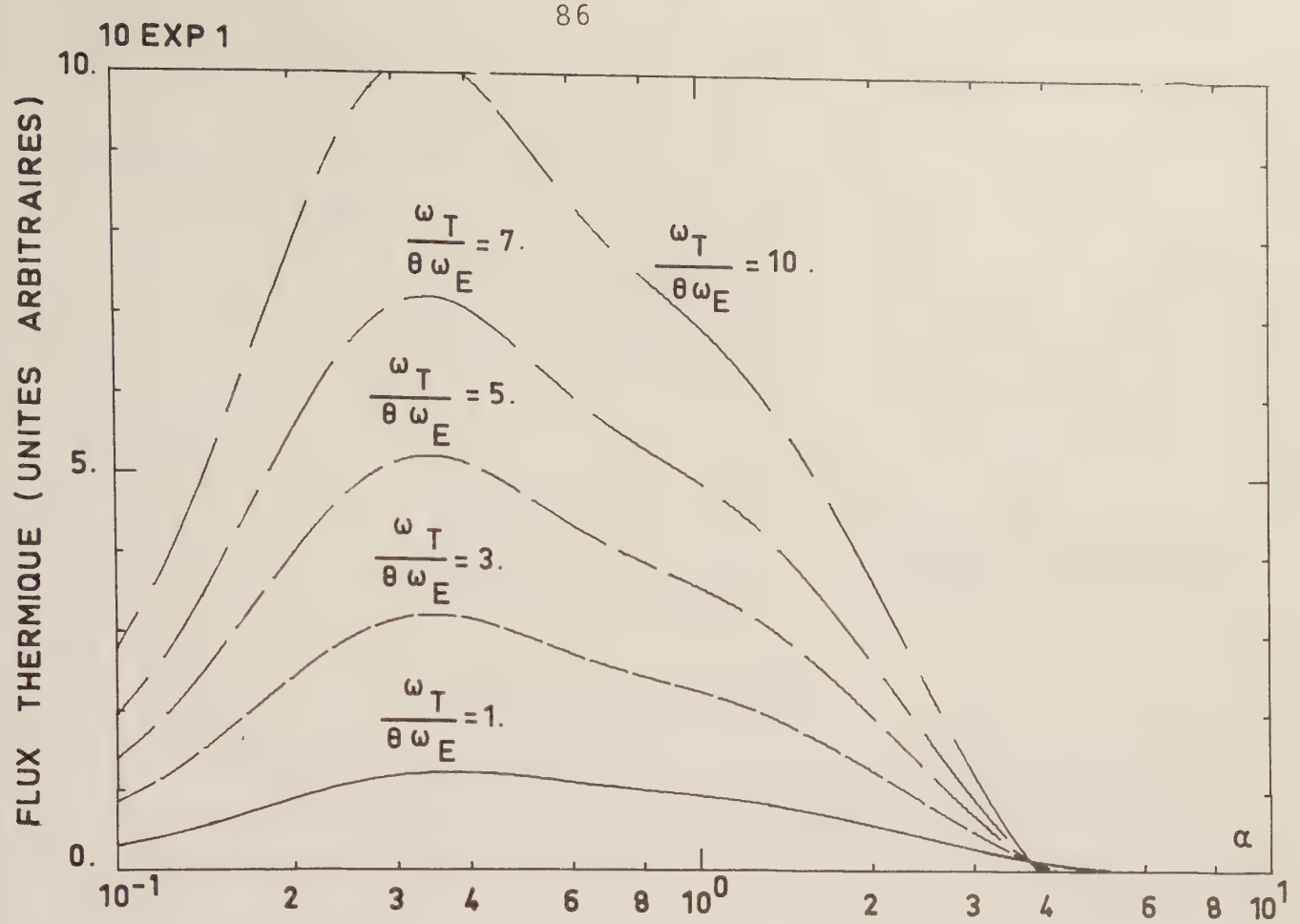


FIG. 18A

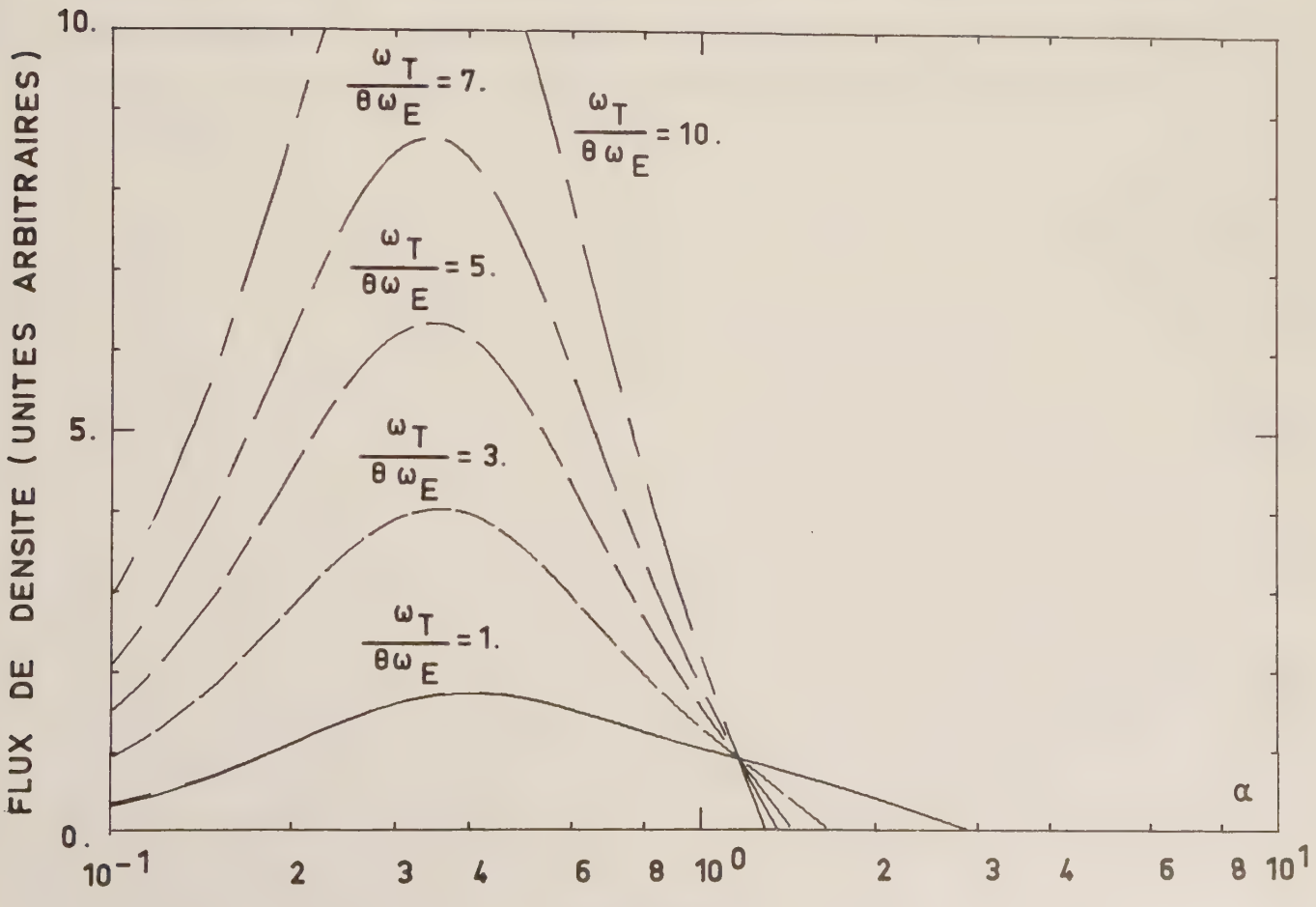


FIG. 18B

pour les flux d'énergie dès que $\omega_T / \theta \omega_E > 1$

On obtient alors les valeurs minima des flux

$$\begin{cases} D \sim 100\, \nu_e a_e^2 \\ \chi_e \sim 1000\, \nu_e a_e^2 \end{cases}$$

à comparer à

$$\begin{cases} D_{neo_cl.} \sim 900\, \nu_e a_e^2 \\ \chi_{neo_cl.} \sim 100\, \nu_e a_e^2 \end{cases}$$

et à

$$\chi_{pseudo} \sim 700\, \nu_e a_e^2$$

Il est donc clair que le mode que nous venons d'étudier ne fait pas diffuser les particules mais fait diffuser de façon beaucoup plus importante l'énergie en accord avec les ordres de grandeurs des formules pseudo-classiques. Néanmoins, soulignons qu'il n'y a pas accord sur les dépendances fonctionnelles vis-à-vis du courant. On ne retrouve pas les dépendantes en q^2 de la théorie néoclassique, ni des formules empiriques pseudo-classiques. Cette dépendance peut exister mais il faudrait probablement résoudre le problème complet de la dépendance radiale du mode pour l'obtenir.

CONCLUSIONS

Nous avons établi que dans le régime de fonctionnement des Tokomaks où les électrons sont dans le régime des bananes et où les ions sont fluides, il était possible de construire des modes instables de grande extension radiale ayant les caractéristiques suivantes :

1) Ces modes ne sont pas stabilisés par le cisaillement même pour $\xi \sim 1$

2) Ils sont convectifs mais leur vitesse de groupe radiale est faible et la condition d'exponentiation $\frac{\gamma}{\omega} >> k a_i^2/\rho$ est facilement satisfaite.

3) L'instabilité peut exister même en l'absence de gradient de température électronique mais elle est amplifiée par ce dernier si la fréquence de collision efficace $\nu_0 R/\rho$ est plus grande que la fréquence du mode.

4) Pour des tores suffisamment trappus, l'instabilité persiste même si la fréquence de collision devient très faible par suite d'effets résonnants sur les électrons.

L'instabilité ainsi mise en évidence est très voisine de l'instabilité d'électrons piégés étudiée par Kadomtsev. La différence fondamentale entre les deux modes est que celui qui a été étudié dans le présent travail est localisé alors que celui de Kadomtsev ne l'est pas. Il en résulte une insensibilité au cisaillement des lignes de force qui lui permet d'exister malgré le cisaillement des machines actuelles.

Les résultats concernant la diffusion restent plus qualitatifs mais nous soulignons néanmoins qu'indépendamment du problème de la limitation non linéaire l'instabilité étudiée provoque une fuite thermique beaucoup plus importante que la fuite des particules, résultat fondamentalement opposé à la théorie néoclassique qui prévoit le rapport

inverse et en outre conforme aux mesures actuelles. Les ordres de grandeurs des coefficients de diffusion obtenus sont compatibles avec les formules empiriques d'Artsimovitch mais on ne retrouve pas les dépendances fonctionnelles exactes. Compte tenu de la complexité du problème et de la façon dont sont obtenues les formules pseudo-classiques cette absence de concordance n'est pas très inquiétante.

Si l'on cherche à appliquer explicitement les résultats précédents aux expériences T3 et ST, on s'aperçoit qu'il est plus difficile d'expliquer les résultats de T3 à l'aide de la présente instabilité que ceux de ST, dans la mesure où les profils de température et de densité de T3 sont effectivement très plats. En effet si on admet que l'instabilité se déclenche à un instant donné, elle affectera peu les gradients de densité par suite de la faiblesse du flux de densité, alors que l'importance du flux thermique risque de fixer la température du plasma dans la zone où existe l'instabilité, c'est-à-dire là où existent les gradients de densité. Au contraire, au voisinage du centre où le profil de densité est sensiblement plat, les flux thermiques seront quasiment néoclassiques. Ce phénomène est encore accentué par le fait que le rapport de miroir est faible dans cette région et qu'il y a donc peu de particules piégées. En conséquence des remarques précédentes on devrait voir la température du centre du plasma s'élever progressivement, raidissant de plus en plus le profil de température électronique jusqu'au moment où le gradient étant localisé dans une zone plate du profil de densité, la fréquence réelle du mode deviendra trop faible pour exister. On atteint alors un régime asymptotique.

Dans le cas de T3 les profils de température et de densité restent voisins de sorte que $\omega_T / \theta \omega_E$ reste de l'ordre de l'unité. Les taux de croissances restent faibles mais les flux de diffusion thermiques restent grands devant les flux de particules et sont compatibles avec les formules d'Artsimovitch.

Il est intéressant de se demander quels diagnostics pourraient conduire à l'identification de la présente instabilité. Les mesures dans les

machines de type Tokomak étant très difficiles et forcément globales il semble que la seule caractéristique susceptible d'être mise en évidence est la localisation de l'instabilité. En sa présence l'étude du niveau de fluctuation devrait révéler un minimum dans le plan équatorial du tore.

Terminons en soulignant que nous nous sommes placés dans les conditions les plus strictes d'existence de l'instabilité. Pour réduire d'éventuels effets Landau, nous avons pris un mode impair, nous avons éliminé l'influence stabilisatrice du cisaillement en prenant $\sigma > 1$, ce qui globalement a conduit à des taux de croissance faibles.

Il est malheureusement impossible d'établir si des modes moins localisés, peut être même pairs, sensibles au cisaillement sur certaines surfaces mais à partir desquels on construirait des quasi-modes ne conduiraient pas à des taux d'exponentiation plus élevés. Ces effets étant difficilement chiffrables il importe de les conserver présents à l'esprit lors de l'interprétation des résultats expérimentaux.

Les expériences en cours ou appartenant à un futur immédiat devraient permettre de savoir si la diffusion anormale doit être attribuée à une turbulence du plasma auquel cas il deviendra primordial d'identifier l'instabilité qui en est responsable ou s'il convient de l'attribuer à d'autres effets comme celui d'un champ magnétique fort sur l'équilibre thermodynamique / 49 / / 50 / ou plus simplement encore aux impuretés en provenance des parois qui souillent le plasma.

A I - DEFINITION DU SYSTEME DE COORDONNEES UTILISE

Nous avons défini au début du chapitre II le système de coordonnées utilisées dans l'espace de configuration. Ce système est essentiellement lié au flux ψ à travers la section droite d'une surface magnétique.

Nous nous proposons ici de définir un système de coordonnées dans l'espace des vitesses utilisant comme composantes l'énergie totale W et le moment magnétique μ des particules considérées. L'intérêt d'un tel système est qu'il permet de tenir compte automatiquement de la conservation de ces invariants sans avoir à calculer explicitement la trajectoire des particules. L'inconvénient est que, les invariants dépendant de l'espace-puisqu'ils caractérisent les conditions initiales (espace et vitesse) de la particule considérée - l'espace de configuration et l'espace des vitesses ne sont plus indépendants. Il est donc nécessaire de recalculer les expressions des opérateurs gradient et gradient dans l'espace des vitesses ainsi que l'élément de volume de l'espace des phases dans ce nouveau système.

Nous pouvons décomposer le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'une particule en une composante parallèle à $\vec{B}$ et une composante perpendiculaire en posant :

$$\vec{v} = v_{\parallel}\,\vec{n} + \vec{v}_{\perp} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \vec{n}\,B$$

$$\text{et} \quad \vec{v}_{\perp} = v_{\perp}\,(\vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta)$$

les vecteurs $(\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant choisis de manière à former un trièdre direct et constituant par exemple un trièdre de Sêret-Frenet. Dans nos calculs nous avons utilisé le trièdre défini par :

$$\vec{n}\ ,\ \vec{e}_1 = \vec{e}_\psi = \frac{\overrightarrow{\nabla\psi}}{|\nabla\psi|}\ ,\ \vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_\psi$$

L'opérateur gradient dans l'espace des vitesses s'écrit alors :

$$\frac{d}{d\vec{v}} = \overrightarrow{\nabla_v W}\,\frac{d}{dW} + \overrightarrow{\nabla_v \mu}\,\frac{d}{d\mu} + \overrightarrow{\nabla_v \theta}\,\frac{d}{d\theta}$$

avec $W = m\varepsilon + e\Phi_0(\gamma)$

$\varepsilon = \frac{1}{2} v^2$, $\Phi_0(\gamma)$ potentiel électrique radial d'équilibre, et $\mu = \frac{v^2}{2B}$

∇_v désigne l'opérateur gradient dans l'espace des vitesses "normal". On a alors :

$$\overrightarrow{\nabla_v W} = \vec{v}$$

$$\overrightarrow{\nabla_v \mu} = \frac{\vec{v}_\perp}{B}$$

$$\overrightarrow{\nabla_v \Theta} = -\frac{\vec{v} \times \vec{n}}{B^2}$$

Les deux premières équations étant évidentes, nous établirons maintenant la troisième à partir de :

$$\sin\Theta = \frac{(\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_2)}{v_\perp}$$

Par différentiation il vient :

$$\cos\Theta \frac{d}{dv_x} = \frac{1}{v_\perp} \frac{d}{dv_x} (\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_2) - \frac{\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_2}{v_\perp^2} \frac{d}{dv_x} v_\perp$$

ou puisque $\vec{e}_2$ ne dépend pas des vitesses

$$\cos\Theta \frac{d\Theta}{dv_x} \nabla_v \vec{\Theta} = \frac{\vec{e}_2}{v_\perp} \frac{d\vec{v}}{dv_x} - \left(\frac{\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_2}{v_\perp^2}\right) \frac{d}{dv_x} v_\perp$$

En calculant de la même façon les autres composantes du gradient il vient :

$$\cos\Theta \nabla_v \Theta = \frac{\vec{e}_2}{v} \mathbb{I} - \left(\frac{\vec{v}_\perp \cdot \vec{e}_2}{v_\perp^2}\right) v_\perp$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur unité 3 x 3 soit encore

$$\cos\Theta \overrightarrow{\nabla_v \Theta} = \frac{1}{v_\perp} \left[-\vec{e}_1 \sin\Theta \cos\Theta + \vec{e}_2 \cos 2\Theta \right]$$

Ce qui après division par $\cos\Theta$ conduit au résultat annoncé. On a donc

$$\frac{d}{d\vec{v}} = \vec{v} \frac{d}{dw} + \frac{\vec{v}_\perp}{B} \frac{d}{d\mu} - \frac{\vec{v}_\perp \times \vec{n}}{v_\perp^2} \frac{d}{d\Theta} \qquad (91)$$

$$= \vec{v} \frac{d}{d\varepsilon} + \frac{\vec{v}_\perp}{B} \frac{d}{d\mu} - \frac{\vec{v}_\perp \times \vec{n}}{v_\perp^2} \frac{d}{d\Theta} \qquad (91\text{bis})$$

A partir des expressions précédentes, on montre facilement que l'élément de volume de l'espace des vitesses s'écrit

$$d^3v = \frac{B\,dw\,d\mu\,d\theta}{|v_{//}|} = \frac{B\,d\varepsilon\,d\mu\,d\theta}{|v_{//}|} \qquad (92)$$

Nous calculerons ensuite le gradient dans l'espace de configuration. Dans le système de coordonnées que nous utilisons toute fonction $f(\vec{x},\vec{v})$ devient une fonction $g(\vec{x}, w, \mu, \theta)$.

Le calcul du gradient de f conduit alors pour toutes les composantes à

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{dg}{dx_i} + \frac{dw}{dx_i}\frac{dg}{dw} + \frac{d\mu}{dx_i}\frac{dg}{d\mu} + \frac{d\theta}{dx_i}\frac{dg}{d\theta}$$

soit $$\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} g + \vec{\nabla} w \frac{dg}{dw} + \vec{\nabla}\mu \frac{dg}{d\mu} + \vec{\nabla}\theta \frac{dg}{d\theta}$$

avec $$\vec{\nabla} w = e\vec{\nabla}\Phi_0 \qquad (93)$$

$$\vec{\nabla}\mu = -\frac{\mu\vec{\nabla}B}{B} - \frac{v_{//}}{B}\left[\vec{v}_x(\vec{\nabla}_x\vec{n}) + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{n}\right] \qquad (94)$$

$$\vec{\nabla}\theta = \left[\vec{e}_1(\nabla\vec{e}_2) + \frac{v_{//}}{v_\perp^2}(\vec{\vec{\nabla}}\vec{n}).(\vec{v}_\perp\times\vec{n})\right] \qquad (95)$$

L'expression (95) s'obtient comme pour le gradient dans l'espace des vitesses en partant de $\sin\theta$ et en calculant le grandient spatial. On aboutit donc finalement à la relation

$$\nabla = \nabla' + e\nabla\Phi_0\frac{d}{dw} - \left[\mu\vec{\nabla}B + v_{//}(\vec{\vec{\nabla}}\vec{n}).\vec{v}_\perp\right]\frac{d}{B\,d\mu}$$

$$+\left[(\vec{e}_1.\vec{\vec{\nabla}}\vec{e}_2) + \frac{v_{//}}{v_\perp^2}(\vec{\vec{\nabla}}\vec{n}).(\vec{v}_\perp\times\vec{n})\right]\frac{d}{d\theta} \qquad (96)$$

A 2 - DETERMINATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION D'EQUILIBRE

Compte tenu du modèle d'équilibre du plasma auquel nous nous intéressons l'équation de Vlasov le décrivant s'écrit :

$$\vec{v}.\vec{\nabla}F - e\vec{\nabla}\Phi_0 \frac{dF}{d\vec{v}} + \Omega(\vec{v}\times\vec{n})\frac{dF}{d\vec{v}} = C(F) \qquad (97)$$

$C(F)$ est un opérateur de collision de type Fokker Planck simplifié que nous étudierons en détails dans l'appendice /A5/ $\nabla\Phi_0(\psi)$ définit le champ électrique d'équilibre et Ω est la fréquence cyclotronique. Nous nous proposons de résoudre cette équation par perturbations en adoptant comme petit paramètre le rapport du rayon de Larmor des particules au rayon caractéristique du cordon de plasma. Nous nous plaçons en outre dans le régime des faibles collisions ("régime des bananes").

A l'ordre le plus bas l'équation (97) se réduit à :

$$\Omega(\vec{v}\times\vec{n})\frac{dF}{d\vec{v}} = -\Omega\frac{dF}{d\theta} = 0$$

soit $F = F_0(W, \mu, \vec{x})$ avec énergie totale d'une particule

En réalité le plasma d'un Tokomak étant isotrope à l'ordre le plus bas, le moment magnétique μ n'intervient pas à cet ordre. Par ailleurs, spatialement, la fonction de distribution d'un plasma axisymétrique confiné ne peut être fonction que des surfaces magnétiques.

Nous adopterons finalement comme solution à l'ordre le plus bas une fonction Maxwellienne satisfaisant à $\frac{d}{dt}F = 0$ c'est à dire à l'équation d'équilibre sans collisions

A l'ordre suivant puisque nous avons supposé être dans le régime des bananes l'équation (64) s'écrit

$$\vec{v}\,\vec{\nabla}F_0 - e\nabla\Phi_0\frac{dF_0}{d\vec{v}} - \Omega\frac{dF_1}{d\theta} = 0$$

Pour calculer F_1 on peut développer directement les opérateurs $d/d\vec{v}$ et $\vec{\nabla}$ à partir des expressions calculées au paragraphe précédent et c'est ce qui a été fait dans / 41 /. En réalité, il est plus simple de remarquer

que la fonction de distribution exacte doit être une fonction des invariants du mouvement et en particulier du moment angulaire $P_\varphi = \psi - \frac{mr}{e} v_\varphi$. On peut donc écrire à priori la fonction de distribution sous la forme $F(W, P_\varphi)$.

Pour continuer dans la détermination des fonctions d'équilibre il convient de séparer le cas des ions et des électrons. Nous avons supposé (page 41) que les ions ont par suite de leur masse, une quantité de mouvement négligeable le long des lignes de force ce qui entraîne $P_\varphi = \psi$. En négligeant en outre les collisions ions-ions, et, compte tenu de l'hypothèse de confinement électrostatique et de l'absence de gradient de température ionique, la fonction de distribution d'équilibre des ions se réduit à la solution d'ordre zéro.

$$f_{oi} = N \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp - \frac{W}{T_i} \qquad (98)$$

N est une constante. La densité des ions s'écrit alors

$$n_{oi}(\psi) = N \exp - \frac{e \Phi_0(\psi)}{T_i} \qquad \text{avec} \qquad e > 0 \qquad (99)$$

Dans le cas des électrons, en supposant que la vitesse dirigée reste faible devant la vitesse thermique, ce qui est raisonnable compte tenu des valeurs des champs électriques parallèles existant dans Tokomak, on peut écrire en linéarisant $F(W_e, P_\varphi)$

$$f_{oe} = F_0(W_e, \psi) - \frac{m_e r}{e} v_\varphi \frac{dF_0}{d\psi} + G(W_e, \mu, \theta, \vec{x}) \qquad (100)$$

avec

$$F_0(W_e, \psi) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e(\psi)} \right)^{3/2} n_0(\psi) \exp - \frac{W_e + e\Phi_0(\psi)}{T_e(\psi)} \qquad (101)$$

En reportant $F_1 = \frac{m_e r}{e} v_\varphi \frac{dF_0}{d\psi} + G(W_e, \mu, \theta, x)$

dans (97) il reste à cet ordre $\Omega \frac{d}{d\theta} G(W_e, \mu, \theta, x) = 0$

Cette dernière condition entraîne seulement que G n'est pas une fonction explicite de θ . Soit g la classe des fonctions correspondantes g est alors déterminée en résolvant l'équation (97) à l'ordre 2 compte-tenu des collisions et après moyenne de l'équation sur θ .

Nous n'expliciterons pas ce calcul fastidieux ici car on rejoint alors la théorie néoclassique de la diffusion et de nombreuses solutions à ce problème ont été proposées dans la littérature

Nous ne mentionnerons que le résultat donné pour l'opérateur de collisions que nous utiliserons (A 5) par Rutherford et al./39/

$$g = \begin{cases} \left[f_0 \frac{eE}{\nu} + \frac{m_e}{n_e \Omega_e^2} \frac{dn_0}{d\psi} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right] \int_{\mu}^{\varepsilon/B_{max}} \frac{B_0 d\mu}{\langle v_{//} \rangle} & \text{particules circulantes} \\ 0 & \text{particules} \end{cases} \qquad (102)$$

le crochet désigne une moyenne sur l'angle θ.

Le terme en g est lié au courant circulant dans Tokomak, ce qui explique qu'il est nul pour les particules piégées qui, ne faisant pas le tour du tore, ne peuvent porter de courant. Il doit être impair en vitesse parallèle pour les particules circulantes ce qui est bien le cas la moyenne sur $v_{//}$ en θ conservant le signe de $v_{//}$.

Le deuxième terme de g correspond au courant de confinement dû à la pression radiale c'est le courant de "bootstrap" de la littérature Anglo Saxonne. Dans les conditions expérimentales normales il reste très petit devant le courant créé par le champ électrique $\vec{E}$ imposé de l'extérieur. En faisant apparaître le déplacement $u_{//}$ de la vitesse moyenne des électrons due à l'action du champ E on peut écrire g sous la forme

$$g \sim \frac{f_0 \langle v_{//} \rangle u_{//}}{V_{Te}^2} \qquad \text{avec} \qquad u_{//} << V_{Te}$$

Rappelons pour clore ce paragraphe que la condition $u_{//} << V_{Te}$ est due à l'existence d'un champ électrique critique Ec/45, 46/au-delà duquel les électrons sont accélérés sans possibilité de thermalisation. Ce sont les "électrons runaways".

A 3 - ECRITURE DE L'EQUATION DE VLASOV PERTURBEE DANS LE CADRE DE L'APPROXIMATION B K W.

Comme nous l'avons indiqué dans le texte, nous avons adopté radialement une approximation B K W qui nous permet de décrire correctement les courtes longueurs d'onde transversales. Nous écrirons donc les perturbations sous la forme,

$$\tilde{\Phi}(\gamma) = \Phi_1(\gamma) \exp i\,(S - \omega t)$$

avec $S = l(\varphi + q\gamma) + k_\psi \psi$

où $q = \frac{1}{l} = \frac{\rho B \varphi}{RB\gamma}$ est l'inverse de la transformée rotationnelle

l est un entier.

On utilise des expressions analogues pour toutes les quantités perturbées.

$\tilde{\Phi}$ doit être une fonction périodique en γ et φ puisqu'après avoir fait un tour de tore en γ il est naturel d'imposer de retrouver le même potentiel perturbé. Cette condition est automatiquement satisfaite pour φ puisque l est entier, mais il n'est pas obligatoirement de même pour lq puisque la transformée rotationnelle peut être irrationnelle. Il faut donc choisir $\tilde{\Phi}_1(\gamma)$ de manière à satisfaire à cette condition.

S doit varier rapidement sur l'échelle de l'équilibre pour que l'approximation B K W soit valable ce qui impose l et $k_\psi |\nabla\psi| >> 1$. Par contre $\varphi + q\gamma$ constituant l'équation d'une ligne de champ S reste invariant quand on décrit une ligne de force puisqu'on reste sur la même surface ψ.

Nous utiliserons le même système de coordonnées qu'au paragraphe précédent pour résoudre l'équation de Vlasov. Le petit paramètre du développement en perturbations sera dans ce cas le rapport ω/Ω où Ω est toujours la fréquence cyclotronique. Pour les ondes de dérive qui nous intéressent ce rapport reste toujours très petit devant un

Nous poserons $\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1$

L'équation de Vlasov perturbée s'écrit à l'ordre le plus bas

$$i(\vec{v}.\vec{\nabla S})\tilde{f}_0 + \Omega(\vec{v}\times\vec{n})\frac{d\tilde{f}_0}{d\vec{v}} = i\frac{e}{m}\Phi_1\vec{\nabla S}\frac{dF_0}{d\vec{v}}$$

soit $i(\vec{v}.\vec{\nabla S})f_0 - \Omega\frac{d\tilde{f}_0}{d\theta} = i\frac{e}{m}\Phi_1\vec{\nabla S}\frac{dF_0}{d\vec{v}}$

L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$\tilde{f}_0 = C\exp i\left(\frac{\vec{v}\times\vec{n}}{\Omega}\right)\vec{\nabla S} = C\ \exp i\ L \qquad (103)$$

et après variation de C il vient la solution de l'équation de Vlasov perturbée prise à l'ordre le plus bas :

$$\tilde{f}_0 = \frac{e}{m}\Phi_1(\gamma)\frac{dF_0}{d\varepsilon} + h(\varepsilon,\mu,\phi,\gamma)e^{iL} \qquad (104)$$

A ce stade h est indéterminée. Pour la calculer, il est nécessaire d'écrire l'équation de Vlasov à l'ordre suivant et d'imposer des conditions de périodicité en θ , angle azimutal dans l'espace des vitesses.

A cet ordre l'équation de Vlasov devient :

$$-i\omega\tilde{f}_0 + i(\vec{v}.\vec{\nabla S})\tilde{f}_1 + \vec{v}.\vec{\nabla}\tilde{f}_0 - \frac{e}{m}\vec{\nabla}\tilde{\Phi}_0\frac{d\tilde{f}_0}{d\vec{v}}$$

$$- i\frac{e}{m}\Phi_1\vec{\nabla S}\frac{dF_1}{d\vec{v}} - \frac{e}{m}\vec{\nabla}\Phi_1\frac{dF_0}{d\vec{v}} - \Omega\frac{d\tilde{f}_1}{d\theta} = C(\tilde{f}_0)$$

$C(\tilde{f}_0)$ est un terme de collision provenant de l'opérateur de collision complet, linéarisé autour de la fonction de distribution d'équilibre exacte.

Cette équation peut encore s'écrire :

$$i(\vec{v}.\vec{\nabla S})\tilde{f}_1 - \Omega\frac{d\tilde{f}_1}{d\theta} = C(\tilde{f}_0) - \frac{e}{m}\nabla\Phi_1\frac{dF_0}{d\vec{v}} + i\omega f_0$$

$$- (\vec{v}.\vec{\nabla})\tilde{f}_0 + \frac{e}{m}\nabla\Phi_0\frac{d\tilde{f}_0}{d\vec{v}} - i\frac{e}{m}\Phi_1\vec{\nabla S}\frac{dF_1}{d\vec{v}} \qquad (105)$$

Pour déterminer h il n'est pas nécessaire de résoudre complètement l'équation précédente. Il suffit d'écrire que $\tilde{f}_1$ doit être une fonction périodique en θ . La solution de l'équation sans second membre étant encore du type K exp iL , K est donné par l'intégrale du second membre de multiplié par exp -iL

La condition qui détermine h est alors :

$$\int_0^{2\pi} e^{-iL}\left[i\omega \tilde{f}_0 - v\nabla\tilde{f}_0 + \frac{e}{m}\nabla\Phi_0\frac{d\tilde{f}_0}{d\vec{v}} - i\frac{e}{m}\Phi_1\nabla S\frac{dF_1}{d\vec{v}} - \frac{e}{m}\nabla\Phi_1\frac{dF_0}{d\vec{v}} + C(\tilde{f}_0)\right]=0 \qquad (106)$$

Nous séparerons les termes de cette équation en deux groupes ceux qui proviennent de termes de la partie f_0 ne contenant pas h et ceux qui contiennent h.

a) Ceux qui ne contiennent pas h

$i\omega\tilde{f}_0$ donne $i\omega\tilde{\Phi}_1\frac{dF_0}{d\varepsilon}$

$-v\nabla\tilde{f}_0$ donne $-\frac{e}{m}\left[\vec{v}\nabla\Phi_1\left(\frac{dF_0}{d\varepsilon}\right)+\Phi_1\vec{v}.\vec{\nabla}\left(\frac{dF_0}{d\varepsilon}\right)\right]$

$\frac{e}{m}\nabla\Phi_0\frac{d\tilde{f}_0}{d\vec{v}}$ donne $\frac{e}{m}\Phi_1\nabla\Phi_0\frac{d}{d\vec{v}}\left(\frac{dF_0}{d\varepsilon}\right)$

Le terme $C(\tilde{f}_0)$ ne donne aucune contribution, car nous avons pris pour fonction d'équilibre F_0 une maxwellienne, ce qui entraîne par définition $C(F_0)=0$

En substituant les expressions précédentes dans (106) il vient :

$$\int_0^{2\pi} e^{-iL}\left[i\omega\tilde{\Phi}_1\frac{dF_0}{d\varepsilon}+\Phi_1\vec{v}.\vec{\nabla}'\frac{dF_0}{d\varepsilon}-\frac{e}{m}\Phi_1\nabla\vec{S}\frac{dF_1}{d\vec{v}}\right]d\theta \qquad (107)$$

Cette expression peut encore se simplifier en développant $\frac{dF_1}{d\vec{v}}$ et en intégrant par parties :

$$\frac{d}{d\vec{v}}F_1 = \frac{mr}{e}\frac{dF_0}{d\psi}\vec{e_\varphi} - \frac{mr}{e}v_\varphi\vec{v}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dF_0}{d\psi}\right)+\vec{e}_{//}g(\varepsilon,\psi)$$

$$\frac{e}{m}\nabla\vec{S}\frac{dF_1}{d\vec{v}} = l\frac{dF_0}{d\psi}+rv_\varphi(\vec{v}.\nabla\vec{S})\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dF_0}{d\psi}\right)$$

$$\int e^{-iL}(\vec{v}.\nabla\vec{S})v_\varphi\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dF_0}{d\psi}\right)d\theta = \int e^{-iL}v.\nabla'\left(\frac{dF_0}{d\varepsilon}\right)d\theta$$

Finalement la contribution des termes ne contenant pas h est :

$$\int_0^{2\pi} \exp -iL\left[i\omega\Phi_1\frac{dF_0}{d\varepsilon}-l\frac{dF_0}{d\psi}\right]d\theta \qquad (108)$$

b) termes de (106) contenant h

Ils s'écrivent :

$$\int_0^{2\pi} \exp - iL \left[i\omega h e^{iL} - v\nabla h\, e^{iL} + \frac{e}{m} \nabla\Phi_0 \frac{dh}{d\vec{v}} e^{iL} + C(h e^{iL}) \right] d\omega$$

Il faut commencer par faire agir $\frac{d}{d\vec{v}}$ et $\vec{\nabla}$ sur h en exprimant les opérateurs dans le système (ε, μ, ψ). Nous ne reproduirons pas ici les calculs qui sont longs et fastidieux. Il vient

$$\vec{v}.\vec{\nabla}h - \frac{e}{m} \nabla\Phi_0 \frac{dh}{dv} = \vec{v}_{//}.\vec{\nabla}'h + \vec{v}_{\gamma E}\vec{\nabla}'h$$

En faisant ensuite agir $\frac{d}{d\vec{v}}$ et $\vec{\nabla}$ sur e^{iL} il reste

$$ihv\nabla L + i\frac{e}{m} \vec{v}_{//} \vec{\nabla S} (\vec{n} \times \nabla\Phi_0)$$

Après d'autres calculs encore plus longs et plus fastidieux, on montre que la moyenne sur θ de ces deux termes se réduit à $ih\vec{v}_D.\vec{\nabla S}$ avec la définition habituelle de la vitesse de dérive. :

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{n}}{\Omega} \times \left[\mu (\nabla B) + v_{//}^2 (\vec{n}.\vec{\nabla})\vec{n} + \frac{e}{m} \nabla\Phi_0 \right] \qquad (109)$$

Il reste à calculer le terme de collisions $C(he^{iL})$. Nous n'avons pas traité le cas général de l'opérateur de Fokker Planck. Dans le cas de l'opérateur linéarisé que nous utilisons et qui est donné dans A5 il vient

$$C(he^{iL}) = e^{iL} C(h) + hC(e^{iL})$$

Dans notre cas C n'agit pas sur θ ce qui permet de faire passer la moyenne à travers l'opérateur C il reste alors :

$$\langle e^{iL} C(he^{iL}) \rangle = C(h) + he^{iL} C(e^{iL})$$

Le deuxième terme conduit à des corrections proportionnelles au produit de la fréquence de collision par le rayon de Larmor des particules, termes qui sont toujours d'un ordre inférieur à l'ordre considéré.

Compte tenn de $\langle e^{iL} \rangle = J_0 (v_\perp |\nabla S| / \Omega)$ en regroupant tous les

termes nous avons finalement établi l'équation.

$$i\vec{v}_{//}.\vec{\nabla}h + (\omega - \vec{v}_D.\vec{\nabla}S) h + v_{\gamma E} |\nabla\gamma| \frac{dh}{d\gamma}$$

$$-i C(h) = \frac{q}{m} \Phi_1(\gamma) J_0\left(\frac{v_\perp |\nabla S|}{\Omega}\right) \qquad (110)$$

qui est semblable à l'équation (13) du chapitre III.

A 4 - CALCUL DE LA DENSITE PERTURBEE DES ELECTRONS ET DES IONS.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de résoudre l'équation (13) du chapitre III.

Nous poserons $\vec{v}_D \vec{\nabla} S = l\omega_E + l\omega_D$ où l est le nombre entier intervenant dans S , ω_E représente la fréquence de dérive dans le champ électrique radial et ω_D la fréquence de dérive de courbure magnétique que nous expliciterons ultérieurement.

Par ailleurs h ne pouvant dépendre de φ en raison de la symétrie torique le terme en $\vec{v}_{//} . \vec{\nabla}$ se réduit à $v_{//} \frac{B\gamma}{B} |\nabla\gamma| \frac{d}{d\gamma}$ et, en introduisant la transformée rotationnelle $\frac{1}{q}$ à $\frac{v_{//}}{Rq} \frac{d}{d\gamma}$

Nous récrirons donc l'équation sous la forme :

$$i\left[-\omega + l\omega_E + l\omega_D\right]h + \frac{v_{//}}{Rq}\frac{dh}{d\gamma} + v_{\gamma E}|\nabla\gamma|\frac{d}{d\gamma}h = e\Phi_1(\gamma)\, J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) + C(h) \qquad (111)$$

1.1. Calcul de h pour les électrons circulants

Nous verrons explicitement dans le cas des ions que l'argument de la fonction de Bessel $\frac{v_\perp |\nabla S|}{\Omega}$ représente les effets de rayon de Larmor fini des particules. Dans le cas des électrons ces effets sont complètement négligeables et nous prendrons $J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) = 1$

La résolution de (111) se fait en tenant compte de l'ordre suivant de grandeurs relatives des fréquences :

$$\omega_D \ll \omega \ , \ \omega_E \ll \omega_{be} = \frac{V_{Te}}{Rq}$$

Pour tenir compte du cisaillement des lignes magnétiques, nous sommes amenés à poser sur une surface magnétique ψ

$$h = \hat{h}(\gamma) \exp i l q' \nabla\psi\gamma \qquad \text{avec} \quad \nabla\psi = \psi - \psi_0$$

h et $\hat{h}$ coincident sur la surface magnétique rationnelle ψ_0 prise comme référence. $\hat{h}(\gamma)$ doit donc être une fonction périodique en γ de manière à conduire à la même fonction de distribution après un petit tour de tor (puisque h ne dépend pas de φ).

A l'ordre le plus bas l'équation (111) se réduit à

$$\frac{v_{//}}{Rq} \frac{dh}{d\gamma} = 0$$

$$h = h_0 = \hat{h}_0(\gamma) \exp i l q' \nabla\psi \gamma = C^{te}$$

$$\hat{h}_0(\gamma) = C^{te} \times \exp i l q' \nabla\psi \gamma$$

Il est clair que pour une infinité de surfaces telles que la quantité $q' \nabla\psi$ ne soit pas rationnelle $\hat{h}_0(\gamma)$ ne peut être périodique. La seule solution acceptable est donc $h_0 = 0$ sur toutes ces surfaces. Le cas des surfaces rationnelles est traité en détails dans le chapitre IV page ( ).

La solution de(111) à l'ordre suivant est impaire en $v_{//}$ et ne contribue pas à la densité perturbée. La première contribution des électrons circulants à la densité est donc d'ordre 2 et nous pouvons toujours la négliger.

1.2. Calcul de h pour les électrons piégés

Comme dans le paragraphe précédent la solution de l'équation à l'ordre le plus bas est $h = h_0$ = constante. Mais les électrons piégés ne faisant pas un tour complet de tore, nous n'avons pas à imposer de conditions de périodicité, et la solution d'ordre zéro constante en γ est parfaitement acceptable.

A l'ordre suivant, l'équation s'écrit pour les faibles collisions :

$$i \left[-\omega + l\omega_E \right] h_0 + \frac{v_{//}}{Rq} \frac{dh_1}{d\gamma} = \Phi_1(\gamma) \qquad (112)$$

Cette équation permet de déterminer ho en imposant que le nombre de particules qui arrivent en un point miroir soit le même que celui qui en repartent. Cette condition traduit la condition physique d'absence d'accumulation de charges en ces points. Nous noterons h^+ et h^- les fonctions de distribution correspondantes. En notant γ_1 et γ_2 les abscisses angulaires des points de réflexion on doit avoir

$$h^+(\gamma_1) = h^-(\gamma_1) \qquad h^+(\gamma_2) = h^-(\gamma_2)$$

Ce qui est équivalent à

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{dh^+(\gamma)}{d\gamma} d\gamma = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{dh^-(\gamma)}{d\gamma} d\gamma \qquad (113)$$

On tire la valeur de ho de cette condition. Il vient

$$ho = \frac{1}{(\omega - l\omega_E)\tau} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Phi_1(\gamma) \frac{Rq}{v_{//}} \, d\gamma$$

avec

$$\tau = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{Rq}{v_{//}} \, d\gamma$$

τ est le temps mis par une particule pour faire l'aller-retour entre 2 points miroirs.

Nous donnerons pas ici l'expression de h_1, qui en l'absence de collision est impaire en $v_{//}$ et ne contribue donc pas à la densité perturbée. Le problème collisionnel est discuté en détails dans l'appendice A 6.

1.3. Calcul de la densité perturbée des électrons

Nous avons obtenu la fonction de distribution perturbée des électrons suivantes :

$$f = \frac{e}{Te} \tilde{\Phi}_1(\gamma) \frac{df_{oe}}{d\varepsilon}$$ Pour les électrons circulants

$$f = \frac{e}{Te} \tilde{\Phi}_1(\gamma) \frac{df_{oe}}{d\varepsilon} + h_0$$ Pour les électrons piégés

La densité perturbée s'obtient par intégration sur l'énergie et conduit en rassemblant les contributions des deux populations à :

$$\tilde{n}_e = \frac{e}{Te} \tilde{\Phi}_1(\gamma) n_0(\psi) + \tilde{\delta n}_e$$

$\tilde{\delta n}_e$ est la contribution de ho et le cas échéant des collisions. Nous l'expliciterons dans A 6, remarquons cependant que $\tilde{\delta n}_e$ reste normalement petit devant $\tilde{n}_e$ car ce terme ne concerne que la fraction des particules piégées.

2.1. Calcul de h pour les ions

Dans le cas des ions nous avons adopté pour ordre relatif des fréquences l'ordre suivant :

$$\omega_D, v_{\gamma E} |\nabla \gamma| << \omega, l\omega_E << \omega_{bi} = \frac{v_{Ti}}{Rq}$$

et nous négligeons les collisions.

ω étant plus petite que ω_{bi} nous n'avons pas à distinguer les ions piégés des ions circulants tout se passe comme s'il n'y avait pas d'ions piégés. Enfin, nous tenons compte des effets de rayon de Larmor finis.

A l'ordre le plus bas l'équation (111) devient

$$(\omega - l\omega_E) h_0 = \tilde{\Phi}_1(\gamma)\, J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right)$$

$$h_0(\gamma) = \frac{\tilde{\Phi}_1(\gamma)}{\omega - l\omega_E}\, J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right)$$

Cette solution possède la bonne périodicité en γ puisque par hypothèse $\Phi_1(\gamma)$ est périodique.

A l'ordre 1 il vient : $i \frac{v_{//}}{Rq} \frac{d}{d\gamma} h_0 + (\omega - l\omega_E) h_0 = 0$

$$h_1 = -\frac{i}{\omega - l\omega_E} \frac{v_{//}}{Rq} \frac{d}{d\gamma} \tilde{\Phi}_1(\gamma)\, J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right)$$

A l'ordre 2 on a alors

$$i \frac{v_{//}}{Rq} \frac{d}{d\gamma} h_1 + (\omega - l\omega_E) h_2 - l\omega_D h_0 + i v_{\gamma E} |\nabla\gamma| \frac{d}{d\gamma} h_0 = 0$$

d'où

$$h_2 = \frac{\tilde{\Phi}_1(\gamma)}{\omega - l\omega_E}\left(1 - \frac{l\omega_D}{\omega - l\omega_E}\right) - i v_{\gamma E} |\nabla\gamma| \frac{\tilde{\Phi}_1(\gamma)\, J_0(v_\perp \nabla S/\Omega)}{(\omega - l\omega_E)^2}$$

$$- \left(\frac{1}{\omega - l\omega_E} \frac{v_{//}}{Rq}\right)^2 \frac{d^2}{d\gamma^2} \frac{\tilde{\Phi}_1(\gamma)\, J_0(v_\perp \nabla S/\Omega)}{(\omega - l\omega_E)^2}$$

2.2. Calcul de la densité perturbée des ions

Comme pour les électrons elle s'obtient en intégrant la densité perturbée sur l'énergie

$$\tilde{f}_i = -\frac{e}{Ti} \tilde{\Phi}_1(\gamma) \frac{df_{0i}}{d\varepsilon} + h\, J_0\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right)$$

d'où

$$\tilde{n}_i = -\frac{e}{Te} \tilde{\Phi}_1 n_0 + \int J_0^2\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) \frac{B\, d\varepsilon\, d\mu\, d\theta}{|v_{//}|} h_2 \qquad (114)$$

Compte tenu de l'expression (110bis) de ω_D nous avons trois types d'intégrales à calculer qui sont :

$$4\pi \int J_0^2\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) \frac{BF_0 d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|} = I_0(b)e^{-b} = F(b)$$

$$4\pi \int J_0^2\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) v_{//}^2 \frac{F_0 B d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|} = \frac{1}{2} V_T^2 \; I_0(b)e^{-b}$$

$$4\pi \int J_0^2\left(\frac{v_\perp \nabla S}{\Omega}\right) v_\perp^2 \frac{F_0 B d\varepsilon\, d\mu}{|v_{//}|} = V_T^2 \; I_0(b)e^{-b} \left[1 - b\left(1 - \frac{I_1(b)}{I_0(b)}\right)\right]$$

Où on a posé

$$b = \frac{l^2 a_i^2 q^2}{2\rho^2}\left(1 + \left(\frac{\Lambda}{q}\right)^2\right)$$

$$\frac{\Lambda}{q} = \frac{k\rho}{lq} - \xi\gamma \qquad\qquad \xi = \frac{q'\rho}{q}$$

En reportant dans (114) on obtient finalement :

$$n_i = \frac{e}{T_i} n_0 \left\{ -\Phi_1 + \frac{\omega}{\omega - l\omega_E} F(b) \left[\Phi_1\left(1 + \frac{l<\omega_D>}{\omega - l\omega_E}\right) - i \frac{l\omega_E}{\omega - l\omega_E} \frac{d\Phi_1}{d\gamma} - \frac{V_{Ti}^2}{2q^2 R^2} \frac{1}{(\omega - l\omega_E)^2} \frac{d^2\Phi_1}{d\gamma^2}\right]\right\}$$

où $<\omega_D> = \frac{a_i V_{Ti} q}{\rho R}\left(\cos\gamma + \frac{\Lambda}{q}\sin\gamma\right)$ est la moyenne sur l'énergie de la dérive magnétique de courbure.

A 5 - OPERATEUR DE COLLISIONS UTILISE

Nous ne nous intéressons qu'aux collisions électrons ions et électrons électrons. Le calcul que nous présentons ci-dessous est valable pour le premier type de collisions. Pour les collisions électrons électrons il suffira de se reporter à l'article de Rosenbluth et al /42 / sur les phénomènes de transport dans les systèmes toroïdaux.

Nous partons de l'opérateur de Fokker Planck complet écrit sous la forme de Landau /47/ /48/

$$C_{ei}(F_e, F_i) = C_{ei} \frac{d}{d\vec{v}} \int d^3v' \frac{d^2 u}{d\vec{v} d\vec{v}'} \left(F_i(v') \frac{dF_e}{d\vec{v}}(\vec{v}) - \frac{m_e}{m_i} F_e \frac{dF_i}{d\vec{v}'}(v') \right)$$

avec $C_{ei} = \dfrac{2\pi e^4 \log \Lambda_c}{m_e^2}$ Λ_c étant le logarithme coulombien

$$u = \vec{v} - \vec{v}'$$

$$\frac{d^2 \vec{u}}{d\vec{v} d\vec{v}} = \frac{(u^2 \mathbb{I} - \vec{u}\,\vec{u})}{u^3} = \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i\, u_j}{u^3}$$ en notations indicielles

$\mathbb{I}$ désigne le tenseur unité 3 x 3

Nous linéariserons l'opérateur en posant $F = f_0 + f_1$

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons négligé la correction f_1 de la fonction de distribution ionique.

Nous poserons donc :

$$F_i = f_{0i} \qquad F_e = f_{0e} + f_{1e}$$

Il vient à des corrections en m_e/m_i près

$$C_{ei}(f_0, f_1) = C_{ei} \frac{d}{d\vec{v}} \int d^3v' \frac{d^2 u}{d\vec{v} d\vec{v}} f_{0i}(v') \frac{d f_{1e}}{d\vec{v}}$$

soit en effectuant l'intégration sur v'

$$\int f_{0i}(v') d^3v' = n_0$$

$$C_{ei}(f_0, f_1) = n_0 C_{ei} \frac{d}{d\vec{v}} \frac{u^2 \mathrm{II} - \vec{u}\vec{u}}{u^3} \frac{d}{d\vec{v}} f_{1e} \qquad (115)$$

Pour tout vecteur $\vec{A}$ on a les relations

$$\mathrm{II}\,\vec{A} = \vec{A}$$

$$(\vec{u}\vec{u})\,A = \vec{u}(\vec{u}\vec{A}) \qquad (116)$$

Par ailleurs nous pouvons écrire d'après A. 1.

$$\frac{d}{d\vec{v}} f_{1e} = \vec{v} \frac{d}{d\varepsilon} f_{1e} + \vec{v}_\perp \frac{d}{B\,d\mu} f_{1e}$$

Il n'y a pas de dérivée par rapport à θ car f_{1e} n'en dépend pas explicitement. Appliquant les relations (116) à $\vec{v}$ et à $\vec{v}_\perp$ et, en supposant en outre $\vec{u} \sim \vec{v}$ ce qui est légal dans l'approximation $\frac{m_e}{m_i} \ll 1$ on a :

$$(\vec{u}\vec{u})\,\vec{v} = \vec{u}\,(\vec{u}\,.\,\vec{v}) \sim v^2\,\vec{v}$$

$$\mathrm{II}\;\vec{v} = \vec{v}$$

$$(\vec{u}\vec{u})\,\vec{v}_\perp = \vec{u}\,(\vec{u}.\,\vec{v}_\perp) \sim v_\perp^2\,\vec{v}$$

$$\mathrm{II}\;\vec{v}_\perp = \vec{v}_\perp$$

D'où en omettant pour simplifier l'indice **e**

$$\left(\frac{u^2\mathrm{II} - \vec{u}\vec{u}}{u^3}\right)\vec{v}\,\frac{df_1}{d\varepsilon} = \left(\frac{\vec{v}}{v} - \frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{df}{d\varepsilon} = 0$$

$$\left(\frac{u^2\mathrm{II} - \vec{u}\vec{u}}{u^3}\right)\vec{v}_\perp \frac{df_1}{B d\mu} = \left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right]\frac{df_{1e}}{B d\mu}$$

Ce qui conduit alors à :

$$\frac{d}{dv}\left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right]\frac{df_1}{B d\mu} =$$

$$\left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right]\frac{d}{d\vec{v}}\frac{df_1}{B d\mu} + \frac{df_1}{B d\mu}\frac{d}{d\vec{v}}\left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right]$$

Dans le premier terme du membre de droite seul le terme en $\vec{v}_\perp \frac{d}{B d\mu}$ donne une contribution non nulle.

$$\left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2 \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right] \vec{v}_\perp = \frac{v_{//}^2 \, v_\perp^2}{v^3}$$

Dans le deuxième terme on a :

$$\frac{d}{d\vec{v}} \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) = \frac{2}{v}$$ qui s'obtient en décomposant $\vec{v}$ en ses composants

$$\vec{v} \frac{d}{d\vec{v}} \left(\frac{v_{//}}{v}\right) = v^2 \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{v_{//}}{v}\right) + \frac{v_\perp^2}{v} \frac{dv_{//}}{B d\mu} = 0$$

$$\frac{d}{d\vec{v}} \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right) = v_{//} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{v_{//}}{v}\right) = \frac{v_\perp^2}{v^3}$$

En regroupant les termes il reste :

$$\frac{d}{d\vec{v}} \left[\left(\frac{v_{//}}{v}\right)^2 \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) - \left(\frac{\vec{v}_{//}}{v}\right)\right] \frac{d}{B d\mu} =$$

$$\frac{v_{//}^2 \, v_\perp^2}{v^3} \frac{d}{B d\mu} \left(\frac{d f_1}{B d\mu}\right) + \left(2 \frac{v_{//}^2}{v^3} - \frac{v_\perp^2}{v^3}\right) \frac{d}{B d\mu} f_1 \qquad (117)$$

En introduisant $\mu = \frac{v_\perp^2}{2B}$ et en posant $\nu_{ei} = \frac{2 C_{ei} \, n_0}{v^3}$

on obtient finalement en reportant (117) dans (115)

$$C_{ei} \; (f_0 , f_1) = \frac{\nu_{ei}(v)}{B} \, v_{//} \frac{d}{d\mu} \frac{\mu v_{//}}{B} \frac{d}{d\mu} f_1$$

C'est l'opérateur que nous avons utilisé pour traiter le problème collisionnel.

A 6 - CALCUL de la FONCTION de DISTRIBUTION PERTURBEE h DES ELECTRONS en PRESENCE de COLLISIONS

Nous nous proposons de résoudre dans ce paragraphe l'équation (57) du chapitre IV qui s'écrit

$$i(\omega - l\omega_E)h = \bar{\Phi} - \frac{2\nu}{\tau'} \frac{R}{\rho} \frac{1}{\sin\gamma_0} \frac{d}{d\gamma_0} w \frac{1}{\sin\gamma_0} \frac{d}{d\gamma_0} h \qquad (118)$$

avec $$\tau' = \int_0^{\gamma_0} d\gamma \left[\cos\gamma - \cos\gamma_0\right]^{-1/2} \qquad (119)$$

$$w = \int_0^{\gamma} d\gamma \left[\cos\gamma - \cos\gamma_0\right]^{+1/2} \qquad (120)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2\tau'} \int_{-\gamma_0}^{+\gamma_0} \left[\cos\gamma - \cos\gamma\right]^{-1/2} d\gamma = \frac{1}{2\tau'} \bar{\Phi}' \qquad (121)$$

w et τ' s'expriment simplement en fonction d'intégrales elliptiques complètres de première et deuxième espèces, d'argument $k = \sin\gamma_0/2$, il vient : $\tau' = \sqrt{2}\, K(k)$

$$w = 2\sqrt{2} \left[E(k) - k'^2 K(k) \right]$$

$$k'^2 = 1 - k^2$$

Il est alors naturel d'utiliser k comme variable dans l'équation (118) qui devient

$$\frac{\nu}{4} \frac{R}{\rho} \frac{1}{k\,K(k)} \frac{d}{dk} \frac{E(k) - k^2 K(k)}{k} \frac{d}{dk} h + i(\omega - l\omega_E)h = \bar{\Phi}(k) \qquad (122)$$

et qui après développement conduit à l'équation (57) du chapitre IV

$$\frac{d^2h}{dk^2} + \frac{G_1}{k} \frac{d}{dk} h + i G_2 h = \sqrt{2} \frac{\Phi'}{\sqrt{R/\rho}} \frac{k^2}{E(k) - k'^2 K(k)} = \beta\Phi' \qquad (123)$$

avec

$$G_1 = \frac{K(k) - E(k)}{E(k) - k'^2 K(k)} \qquad G_2 = \frac{4\alpha^2 k' K(k)}{(k) - k^2 K(k)}$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega - l\omega_E}{\sqrt{\frac{R}{\rho}}} \qquad \beta = \sqrt{2}\,\frac{k^2}{\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[E(k) - k'^2 K(k)\right]}$$

La résolution analytique de l'équation (123) étant impossible nous nous sommes proposés de l'intégrer numériquement. Nous ne possèdions comme seules conditions aux limites "intuitives" que la régularité des solutions en $k = 0$ et $k = 1$. Soulignons que l'équation homogène étant singulière en ces deux points, cette double régularité détermine entièrement la solution. Comme nous ne connaissions ni la valeur de h ni celle de sa dérivée en un même point nous n'avons pu utiliser aucune méthode standard d'intégration numérique. Nous avons donc été contraint d'adopter un processus strictement calqué sur l'analyse :

Soit $y_1(k)$ la solution de l'équation homogène régulière en $k = 0$, $y_2(k)$ la solution de l'équation homogène régulière en $k = 1$, et W le wronskien de cette équation. Par variation des constantes, on peut alors écrire la solution de l'équation complète.

$$h = Cy_1 + Dy_2 + \beta\left[y_2\int^k y_1\,\frac{\bar{\Phi}'\,dk''}{W} - y_1\int^k y_2\,\frac{\bar{\Phi}'\,dk''}{W}\right]$$

les constantes C et D déterminent par l'intermédiaire des conditions de régularité la valeur des bornes inférieures des intégrales. La solution de (123) s'écrit alors formellement

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{R}{\rho}}}\,\frac{k^2}{E(k) - k'^2\,K(k)}\left[y_2(k)\int_0^k \frac{y_1\,\bar{\Phi}'\,dk}{W(y_1, y_2)} - y_1\int_1^k \frac{y_2\,\bar{\Phi}'\,dk}{W(y_1, y_2)}\right] \qquad (124)$$

Connaissant $y_1(k)$, $y_2(k)$, $\bar{\Phi}'(k)$ et W nous sommes donc en mesure de calculer h par simple intégration.

$\bar{\Phi}'$ se calcule facilement par intégration numérique. L'expression de W obtenue à partir de la définition du wronskien est

$$W = \exp - \int^k \frac{G_1}{k}\,dk = \exp - \int^k \frac{(K(k'') - E(k''))\,dk''}{k''\,E(k'') - (1-k'')^2\,K(k'')} \qquad (125)$$

qui s'intègre également numériquement sans difficulté.

Tout le problème est donc reporté sur la détermination de $y_1(k)$ et $y_2(k)$. En développant l'équation au voisinage de $k = 0$ il est facile d'obtenir la valeur de la solution régulière, et de sa dérivée en ce point ce qui fournit une initialisation pour l'intégration numérique. Signalons qu'au voisinage de $k = 0$ il est facile de montrer que l'équation (123) tend vers une équation de Bessel, ce qui fournit le comportement de y_1 et y_1' au voisinage de 0. La situation est plus délicate en ce qui concerne y_2. La méthode précédente n'est guère applicable, car la singularité en $k = 1$ est logarithmique et il est extrêmement difficile d'obtenir un développement de la fonction et de sa dérivée valables sur un intervalle suffisamment large pour ne pas avoir à craindre d'instabilité numérique. La seule information utile qu'on puisse véritablement en tirer est que la solution y_2 tend vers 0 en $k = 1$. Pour tourner cette difficulté nous avons calculé y_2 à partir de la connaissance de y_1, et du Wronskien. En effet en posant $y_2(k) = y_1(k)\ Z(k)$ et en substituant dans la partie homogène de (123) il vient après division par $y_1(k)$.

$$Z'' + Z'\left[\frac{G_1}{k} + \frac{2\,y_1'}{y_1}\right] = 0$$

soit

$$Z = \int_1^k \frac{1}{y_1^2}\left(\exp - \int^{k''} \frac{G_1}{k}\,dk''\right) dk''$$

d'où

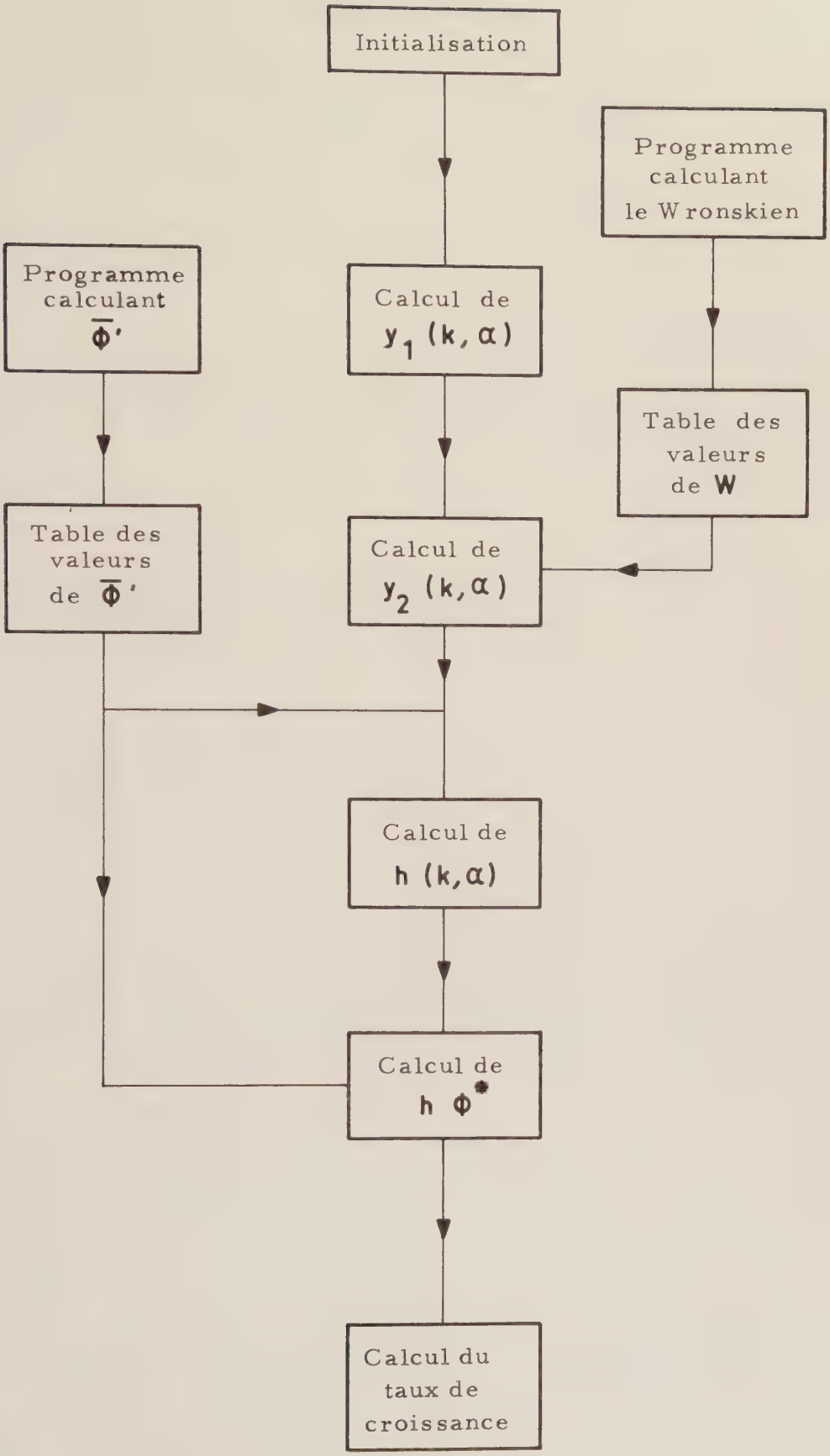
$$y_2(k) = y_1 \int_1^k \frac{W(k'')\,dk''}{y_1^2} + (\lambda = 0)\ y_1$$

Nous avons donc pu ramener la détermination de $y_2(k)$ à une simple intégration numérique processus qui est inconditionnellement stable.

Les constantes ont été déterminées de manière à avoir une solution nulle en $k = 1$. En réalité le Wronskien est défini à une constante multiplicative près, il en est donc de même de y_2 mais ce point n'intervient

pas dans le résultat sur h car dans (124) seul le rapport $y_2 / W(y_1, y_2)$ intervient. Terminons en mentionnant que dans (123) nous avons utilisé le fait que β reste sensiblement constant pour k compris entre 0 et 1.

La méthode décrite dans ce paragraphe est résumée succinctement dans le bref organigramme donné page suivante. Nous y avons ajouté l'étape ultime du calcul c'est-à-dire le calcul du taux de croissance par intégration numérique des expressions (56) et (57) du chapitre IV obtenue par perturbation de la forme quadratique associée à la relation de dispersion.


Initialisation
Programme calculant le Wronskien
Programme calculant $\overline{\Phi}'$
Calcul de $y_1(k,\alpha)$
Table des valeurs de W
Table des valeurs de $\overline{\Phi}'$
Calcul de $y_2(k,\alpha)$
Calcul de $h(k,\alpha)$
Calcul de $h\,\Phi^*$
Calcul du taux de croissance

A 7 - ETUDE DU MODE RESONNANT POUR

On part de l'équation (48)

$$i \frac{v_{//}}{Rq} \frac{d}{d\gamma} h + (\omega - l\omega_E - l\omega_D(\gamma))h = f(\varepsilon, \omega, \psi)\ \Phi(\gamma) \qquad (126)$$

qu'on résout ordre par ordre compte tenu de l'hypothèse $\omega << \frac{v_{//}}{Rq}$ qui reste valable dans ce cas.

A l'ordre le plus bas, il vient comme précédemment $\frac{v_{//}}{Rq} \frac{dh}{d\gamma} = 0$ qui entraine h_0 indépendant de γ. h_0 est alors déterminé comme précédemment en écrivant qu'à l'ordre suivant on doit avoir $h^+(\gamma_0) = h^-(\gamma_0)$

Il vient

$$\int_{-\gamma_0}^{+\gamma_0} \frac{f(\varepsilon, \omega, \psi)\ \Phi(\gamma) - (\omega - l\omega_E - l\omega_D)}{v_{//}/Rq} h_0 = 0 \qquad (127)$$

avec

$$\omega_D(\gamma) = \frac{\varepsilon}{\Omega_{ce} R} \frac{q}{\rho} \left[\cos\gamma + \frac{\Lambda}{q} \sin\gamma\right]$$

$$\frac{\Lambda}{q} = \frac{k\rho}{lq} - \xi\gamma \qquad \xi = \frac{q'\rho}{q}$$

Toutes les intégrales sur γ dans (127) s'expriment facilement en fonction d'intégrales elliptiques. En définissant les moyennes comme dans tout ce travail on peut alors écrire la solution de (126) sous la forme :

$$h = \bar{\Phi} \left\{ P.P \frac{i}{\omega - l\omega_E - l\bar{\omega}_D} - \pi\delta\ (l\omega_E + l\bar{\omega}_D - \omega) \right\} \qquad (128)$$

avec

$$\bar{\omega}_D = \omega - l\omega_E \left\{ 1 - \frac{\varepsilon m_e}{Te} \left(\frac{\rho_0}{R\rho}\right)^2 \left[\left(\frac{2E}{K} - 1\right) + 4\xi \left(\frac{E}{k} - k'^2\right) \right] \right\} \qquad (129)$$

En perturbant la forme quadratique associée à la relation de dispersion, on obtient le taux de croissance de l'instabilité résonnante par

$$\gamma_\omega^R \int_0^\pi |\Phi^2| d\gamma = 16\pi \sqrt{\frac{\rho}{2R}} \int F_0(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}\, \delta\left(1 - \frac{\varepsilon m_e}{Te}\left(\frac{\rho_0}{R}\right) G(\xi,k)\right) \bar{\Phi}\tau' k\, dk\, d\varepsilon \qquad (130)$$

ou

$$x = \frac{m_e}{Te} \qquad G(\xi, k) = \left(\frac{2E}{K} - 1\right) + 4\xi\left(\frac{E}{k} - k'^2\right)$$

Dans l'équation précédente les intégrations sur k proviennent du changement de variable habituel $\mu \longrightarrow \sin\gamma_0 \longrightarrow k$

Le calcul se fait alors simplement en faisant "agir" d'abord δ sur l'énergie. Compte tenu de

$$\delta(f(x - x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}$$

On obtient facilement

$$\gamma_\omega^R \int_0^\pi |\Phi_1^2| d\gamma = -4 \sqrt{\frac{\rho}{2\pi R}} \int_0^{k\,max} e^{-\frac{\varepsilon_0 m_e}{Te}} \left(\frac{\varepsilon_0\, m_e}{Te}\right)^{3/2} \times$$

$$\left[\omega - l\omega_E + l\omega_T \left(\frac{m\varepsilon_0}{T} - \frac{3}{2}\right)\right] \bar{\Phi}^2(k) K(k) k\, dk\, d\varepsilon \qquad (131)$$

où ε_0 est défini en fonction de ξ et de k par

$$1 - \frac{\varepsilon_0 m_e}{Te}\left(\frac{\rho_0}{R}\right) G(\xi, k) = 0$$

et $k\,max$ par : $G(\xi, k) = 0$ en effet pour des valeurs plus grande de k, $G(\xi, k)$ devient négatif et il n'y a plus de résonnance.

Le calcul de (131) se fait par intégration numérique.

A 8 - CALCUL DES PARAMETRES DE L'INSTABILITE POUR $b \sim 1$

Au cours de notre travail nous avons en général supposé $b \ll 1$ afin de simplifier les expressions déjà très complexes. La recherche des modes d'exponentiation maximum nous a conduit à étudier les modes à très courtes longueurs d'onde tel que $b \sim 1$. Dans le présent appendice nous donnons les expressions rigoureuses des diverses grandeurs qui caractérisent l'instabilité pour b quelconque.

L'étude de la relation de dispersion (23) nous a montré que la partie réelle de la fréquence du mode était sensiblement indépendante de sa localisation et était solution de l'équation.

$$1 + \Theta - \frac{\omega\,\Theta}{\omega - l\omega_E} F(b) = 0 \qquad (141)$$

avec $F(b) = I_0(b)e^{-b}$ ou I_0 est une fonction de Bessel de première espèce.

Nous avons donné en (59) la solution de cette expression pour $b \ll 1$ la solution exacte est

$$\omega = \frac{l\omega_E\,(1+\Theta)}{1+\Theta(1-F(b))} \qquad (142)$$

La fonction $F(b)$ étant en facteur des termes de dérive de courbure et des termes acoustiques ioniques de l'équation (23) il est clair que lorsque (142) est satisfaite, la solution de l'équation (23) n'est pas modifiée. En d'autres termes les termes en $F(b)$ ne modifient pas la structure du mode le long des lignes de force.

Modification du taux de croissance

Il s'obtient en perturbant la forme quadratique associée à la relation de dispersion prise à l'ordre le plus bas, soit

$$\Phi_1 \left(1 + \Theta - \frac{\omega\Theta F(b)}{\omega - l\omega_E}\right) = - \frac{T_e}{n_{0e}}\,\delta n_e$$

Soit en introduisant une perturbations γ_ω et en faisant le produit scalaire par $\Phi^* d\gamma$

$$\gamma_\omega \frac{l\omega_E \Theta F(b)}{(\omega - l\omega_E)^2} = \left|\int \Phi_1^2(\gamma)\,d\gamma\right|^{-1} \times \int \frac{T_e}{n_{0^e}}\,\delta n_e\,\Phi_1^*\,d\gamma$$

Compte tenu des modifications de la partie réelle de la fréquence du mode, le taux de croissance devient

$$\gamma_\omega = l\omega_E \theta \left[(1+\theta)\,\Gamma_1 \frac{1-F(b)}{[1+\theta(1-F(b))]^2} + \frac{\omega_T}{\theta\omega_E}\,\Gamma_2 \frac{1}{[1+\theta(1-F(b))]} \right] \quad (143)$$

Modification de la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = l\omega_E\,\theta\,(1+\theta)\sqrt{2}\,b \quad \frac{F(b)\left[1-\frac{I_1(b)}{I_0(b)}\right]}{[1+\theta(1-F(b))]^2} \quad (144)$$

Modification du taux d'exponentiation sur un profil

Compte tenu des expressions (142) et (143) il est facile de voir que la dépendance en b exacte du taux d'exponentiation devient

$$\gamma_\omega \times \frac{\rho_0}{v_g} \sim \frac{1}{\sqrt{2}b} \left\{ \Gamma_1 (1-F(b)) + \frac{\omega_T}{\theta\omega_E} (1+\theta(1-F(b)) \right\} \left[F(b) \left(\frac{1-I_1(b)}{I_0(b)} \right) \right] \quad (145)$$

Modification des flux de diffusions des particules et de l'énergie

La dépendance en b est introduite par la quantité $\gamma_\omega \frac{l\omega_E\theta}{(\omega-l\omega_E)^2}$
Compte tenu des expressions (142) et (143) il vient

$$\Gamma_{fluct} \sim \left[(1+\theta)\,\Gamma_1 \frac{(1-F(b)[1+\theta(1-F(b))]}{F(b)} + \frac{\omega_T}{\theta\omega_E}\,\Gamma_2 \frac{[1+\theta(1-F(b))]^2}{F(b)} \right] \times \int |\phi_1^2(\gamma)|\, d\gamma \quad (146)$$

L'expression de Q_{fluct} est analogue en remplaçant Γ_1 et Γ_2 par Q_1 et Q_2. Dans les expressions précédentes on n'a pas encore remplacé $|\phi_1^2(\gamma)|$ par sa borne supérieure ce qui introduit une dépendance supplémentaire en $1/b$.

A 9 - ETUDE DE LA DELOCALISATION DU MODE PAR LA TURBULENCE

L'objet du présent paragraphe est de préciser si la vitesse de dérive électrique induite par la turbulence est ou non susceptible de délocaliser le mode en "masquant" les effets de dérive magnétique de courbure.

A 9 - ETUDE DE LA DELOCALISATION DU MODE PAR LA TURBULENCE

L'objet du présent paragraphe est de préciser si la vitesse de dérive électrique induite par la turbulence est ou non susceptible de délocaliser le mode en "masquant" les effets de dérive magnétique de courbure.

. Nous considèrerons un champ électrique E correspondant au spectre de turbulence et un champ électrique $\hat{E}$ défini comme étant le champ électrique d'une onde test. Nous nous proposons d'étudier la perturbation induite par l'onde test sur le spectre de turbulence comme dans /43/ et /44 /

Nous poserons $f = f_0 + f_1 + \hat{f}$

où f_0 est la fonction de distribution d'équilibre

f_1 est la fonction de distribution due à l'existence de la turbulence

$\hat{f}$ est la réponse du plasma à l'onde test.

Pour simplifier le problème nous supposerons en outre qu'il n'y a pas de champ électrique d'équilibre et qu'on est en géométrie droite. L'équation de Vlasov s'écrit donc après perturbation par les champs fluctuants

$$\frac{df}{dt} = \frac{E \wedge B}{B^2} \nabla f$$

et en séparant la modification de f due à la présence de l'onde test de celle due à la turbulence

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = - \frac{\tilde{E} \wedge B}{B^2} \nabla f_1 - \frac{\hat{E} \wedge B}{B^2} \nabla f_0 \qquad (147)$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\tilde{E} \wedge B}{B^2} \nabla (f_0 + \hat{f}) - \frac{\hat{E} \wedge B}{B^2} \nabla f_1 \qquad (148)$$

Nous commencerons par résoudre la deuxième équation. Nous poserons $f_1 = f_1^0 + f_1^1$ où f_1^0 est la perturbation de la fonction de distribution d'équilibre avant l'excitation de l'onde test et est donc supposée connue tandis que f_1^1 est la perturbation induite par l'onde test de fréquence ω

A l'ordre le plus bas la solution de (148) s'écrit alors

$$f_1 = f_1^0 - \frac{\tilde{E} \wedge B}{\omega B^2} \nabla \hat{f} - \frac{\hat{E}\ B}{\omega B^2} \nabla f_1^0 \qquad (149)$$

Reportant cette expression dans (147) il vient

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = - \frac{\tilde{E} \wedge B}{B^2} \nabla \left[f_1^0 - \frac{\tilde{E} \wedge B}{\omega B^2} \nabla \hat{f} - \frac{\hat{E} \wedge B}{\omega B^2} \nabla f_1^0 \right] - \frac{\hat{E} \wedge B}{B^2} \nabla f_0 \qquad (150)$$

Pour pouvoir continuer le calcul il est indispensable de passer en transformée de Fourrier des diverses grandeurs qui interviennent. Nous écrirons donc

$$f_1^0 = \Sigma_k \; f_{1k}^0 \; \exp \; i(\omega_k t + \vec{k}.\vec{r})$$

Nous ferons en outre l'hypothèse des phases aléatoires sur les ondes du spectre de turbulence initial. Dans ces conditions dans les sommes sur k qui interviennent lors du calcul de (150) seuls les termes $k' = -k$ contribueront.

A l'ordre le plus bas il vient :

$$\omega_k \; f_{1k}^1 = \left[\frac{\vec{E}_{k-q} \wedge \vec{B}}{B^2} \; \vec{q} \; \hat{f}_q + \frac{\hat{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \; (\vec{k} - \vec{q}) \; f_{1k-q}^0 \right] \times \exp \; i \; [\omega_k t + \vec{k}.\vec{r}] \quad (151)$$

l'expression précédente suppose en outre que

$$\omega_k = \omega_{k-q} + \omega_q$$

ce qui est sensiblement vérifié par le mode que nous étudions lorsque b est petit.

En reportant l'expression (151) dans (150) il vient

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \Sigma_k \; i \; \frac{\vec{E}_{q-k} \wedge \vec{B}}{B^2} \; \vec{k} \; f_{1k}^1 \quad (152)$$

L'expression (152) tient compte de l'hypothèse des phases aléatoires. En explicitant l'expression de f_{1k}^1 il reste

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = - \left((\vec{q}_1 \vec{B}).\vec{k} \right)^2 \hat{f}_q \, |\Phi_{q-k}|^2 + \left((\vec{q} - \vec{B}).\vec{k} \right)^2 \; f_{1k-q}^0 \; \Phi_q \, | \Phi_{q-k}|$$

soit compte tenu de l'expression de $\hat{f}q$ à l'ordre le plus bas et de f_{1k-q}^0

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = 0$$

Le calcul précédent montre donc que la réponse du plasma à l'excitation

d'une turbulence est nulle. La présence d'une turbulence ne modifie donc pas les propriétés localisantes de la courbure et nous ne pouvons utiliser ce mécanisme pour fixer une amplitude maximum au spectre de turbulence. Notons que l'effet précédent n'est pas lié à la présence de particules piégées puisque le calcul présenté est effectué en géométrie droite sans tenir compte d'effet d'inhomogénéité du champ.

BIBLIOGRAPHIE

/ 1 / A. A. GALEEV, R. Z. SAGDEEV, J. E. T. P. 26, 233 (1968)

/ 2 / P. H. RUTHERFORD, Physics of Fluids, 13, 482, (1970)

/ 3 / M. N. ROSENBLUTH, R. D. HAZELTINE, F. L. HINTON, Physics of Fluids, 15, 116, (1972)

/ 4 / L. A. ARTSIMOVITCH, Nuclear Fusion, 12, 215, (1972)

/ 5 / L. A. ARTSIMOVITCH, J. E. T. P. Letters, 10, 82, (1969)

/ 6 / E. P. GORBUNOV, S. V. MIRNOV, V. S. STRELKOV, Nuclear Fusion, 10, 43, (1970)

/ 7 / S. V. MIRNOV, Nuclear Fusion, 9, 57, (1969)

/ 8 / L. A. ARTSIMOVITCH, JETP Letters, 13, 70, (1971)

/ 9 / M. J. FORREST et al, CLM-R, 107, (1970)

/ 10 / M. N. BUSSAC, G. LAVAL, R. PELLAT, 5ème Conférence Européenne sur la Fusion Contrôlée, Vol. I p. 33 (1972)

/ 11 / C. S. LIU, M. N. ROSENBLUTH, C. W. HORTON Physical Review Letters, 29, 1489 (1972)

/ 12 / L. A. ARTSIMOVITCH et al, Conférence Internationale de Novosibirsk (1969) CN 24 B1, p. 17, Vol. I

/ 13 / G. A. BOBROVSKY, E. I. KUZNETZOV, K. A. RAZUMOVA, J. E. T. P., 32, 599, (1971)

/ 14 / G. A. BOBROVSKY et al. J. E. T. P. Letters, 9, 158, (1969)

/ 15 / G. A. BOBROVSKY et al, J. E. T. P. Letters, 14, 99, (1971)

/ 16 / C. MERCIER, SOUBBARAMAYER, 5ème Conférence Européenne sur la Fusion Contrôlée Vol. II, p. 157 (Grenoble 1972)

/ 17 / D. F. DUCHS, 5ème Conférence Européenne sur la Fusion Contrôlée, Vol. I, p. 14 (Grenoble 1972)

/ 18 / A. A. WARE, Conférence de Madison (1971) CN 28 C6 Vol. I, p. 44

/ 19 / D. ROSS, Communication privée.

/ 20 / H. P. FURTH et S. YOSHIKAWA, Physics of Fluids 13, 2593, (1970)

/ 21 / K. BOL et al, Physical Review Letters, 29, 1495, (1972)

/ 22 / Y. N. DNESTROVSKY, D. P. KOSTOMAROV, N. L. PAVLOVA, 4ème Conférence Européenne Utrecht (1970) p. 17

/ 23 / M. N. WIDNER, R. A. DORY, J. T. HOGAN, Physics Letters Vol. 36 A, 3, 217, (1971)

/ 24 / C. MERCIER, SOUBBARAMAYER, J. P. BOUJOT, Conférence de Madison (1971) CN 28C7 p. 425

/ 25 / D. F. DUCHS, H. P. FURTH, P. H. RUTHERFORD, "Skin Effets in Large Tokomaks (à paraître)

/ 28 / B. B. KADOMTSEV, "Plasma Turbulence" Plasma Physics Review Vol. 5 (Consultant Bureau)

/ 29 / Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion Vol. I p. 23 (1972)

/ 30 / C. JABLON thèse (1972)

/ 31 / A. A. GALEEV, R. Z. SAGDEEV, Soviet Physics Doklady 180, 839 (1968)

/ 32 / M. N. ROSENBLUTH et D. N. ROSS, Bul. Ame. Phys. Soc. Ser. II, 15, 1400, (1970)

/ 33 / C. JABLON, G. LAVAL, R. PELLAT, Physical Review Letters 17, 83, (1972)

/ 34 / D. W. ROSS, C. W. HORTON, Physical Review Letters (1972)

/ 35 / B. B. KADOMTSEV, O. P. POGUTSE, JETP 24, 1172 (1967)

/ 36 / B. B. KADOMTSEV, O. P. POGUTSE, Nuclear Fusion 11, (1971)

/ 37 / A. A. GALEEV CN 28 C-11 Conférence de Madison (1971)

/ 38 / B. COPPI, G. LAVAL, R. PELLAT, M. N. ROSENBLUTH, Plasma Physics 10, 1, (1968)

/ 39 / P. H. RUTHERFORD, L. M. KOVRIZNIKH, M. N. ROSENBLUTH F. L. HINTON, Rapport Trieste IC 70-74 (1970)

/ 40 / M. N. ROSENBLUTH, N. A. KRALL, N. ROSTOKER, Nuclear Fusion (1962), Supplément Part. I, p. 143.

/ 41 / P. H. RUTHERFORD, E. A. FRIEMAN, Physics of Fluids, 11, 569, (1968)

/ 42 / C. JABLON, P.H. RUTHERFORD, Physics of Fluids, 10, 2033 (1971)

/ 43 / R. E. AAMODT, Physics of Fluids, 10, 1245, (1967)

/ 44 / T. H. DUPREE, Physics of Fluids, 9, 1773, (1966)

/ 45 / H. DREICER, Physical Review 115, 2, (1959)

/ 46 / H. DREICER, Physical Review 117, 2, (1960)

/ 47 / LANDAU, J. E. T. P., 7, 203, (1937)

/ 48 / M. N. ROSENBLUTH, W. M. Mac DONALD, D. L. JUDD Physical Review 107, 1, (1957)

/ 49 / J. B. TAYLOR, M. MACNAMARA, Physics of Fluids, 14, 1492, (1971)

/ 50 / D. MONTGOMERY, Cours d'été des Houches (1972)